

استعمال الرسم البياني لعidan المبني العشري لبحث علامات قابلية القسمة

Using Base-Ten Block Diagrams for Divisibility Tests

بقلم: Marvin E. Harrell and Dawn R. Slavens:

نشر في: Teaching Children Mathematics , 15 (6), Feb. 2009, pp. 370-381

ملاحظة: عidan المبني العشري عبارة عن: عidan الوحدات (الأحاد) والتي عبارة عن مكعبات $1 \times 1 \times 1$ ، عidan العشرة المكونة من 10 عidan آحاد، مسطحات المئة المكونة من 10 عidan عشرة أي من 100 عدد من عidan الأحاد ومن مكعب الألف المكون من 1000 مكعب من مكعبات $1 \times 1 \times 1$.

يعرض قسم الأبحاث الاستكشافات التي يشارك بها الطالب بشكل عملي وتفكيري في الرياضيات ويوفر للمعلمات نشاطات لتحسين تعليم الرياضيات. وتستحضر هذه المهام حل المسائل والتفكير الذين يحتاجان إلى مهارات في التواصيل، ويربطان مفاهيم ومبادئ رياضية مختلفة مع بعضها البعض. لقد جرى اختبار الأفكار المعروضة هنا في الصفوف.

تقدم هذه الأبحاث للطلاب سياقاً ثرياً يمكنهم من خلاله استكشاف واكتشاف فحوص علامات قابلية القسمة بواسطة استخدام الرسم البياني لعidan المبني العشري. أجريت هذه الفعالities في صفوف السادس واحتاجت إلى وقت تعليمي ملموس، ولكن كان من المجدى قضاء هذا الوقت في هذه الفعالities. كما ويمكن الوصول إلى الطلاب في الصفين الرابع والخامس من خلال هذه الفعالities.

أهداف التعليم، المنطق، والسياق التربوي

عادة ما يتم التغاضي عن فوائد فحص ما إذا كان عدد يقبل القسمة على عدد آخر. ومن الممكن أن يكون تعليم وتعلم فحوص علامات قابلية القسمة وسبب عملها قيمة عند التحدث عن فهم منطق الأعداد المتعلق باعداد كبيرة واعطاء قيمة، تبسيط الكسور، تعلم مفاهيم متقدمة أكثر حول الأعداد مثل المضاعف المشتركة الأصغر والمضاعف المشتركة الأكبر. كما وأنها توفر سياقاً للتدريب على الاستراتيجيات الذهنية الرياضية. وبين الاستعراض السريع للكتب المدرسية في الرياضيات للصفوف الرابع حتى السادس القليل من النقاش، إذا وجد أصلاً، حول كيفية اكتشاف أو تبرير فحوص علامات قابلية القسمة. وعادة ما يتم ذكر هذه الفحوص بشكل عابر وعندما يطبق الطالب هذه الفحوص على مجموعة من الأعداد.

أهداف البحث

- سيكون الطالب قادر على تطبيق علامات قابلية القسمة للأعداد 2، 3، 4، 5، 6، 8 و 9.
- سيفهمون استراتيجية تفكير (توزيع) عدد إلى مجموع عددين وفحص ما إذا كان واحد منهما يقبل القسمة على عدد ما.
- فهم لماذا تعمل بعض علامات قابلية القسمة.

المواضيع

جميع الدروس

إننا نوصي بأن يعمل الطالب في مجموعات متفاوتة (غير متجانسة) مكونة من أربعة طلاب لاستكمال الدرس في هذا البحث. يحتاج كل طالب في كل درس إلى قلمين مختلفين وملونين، آلة حاسبة، ورقة العمل الملائمة، وورقة رسم بياني لعidan المبني العشري. الآلات الحاسبة مفيدة للتحقق من نتائج فحوص قابلية القسمة، ولكن، استخدم معظم طلابنا استراتيجيات الحساب الذهني. يمكنك استعمال أوراق الرسم البياني لعidan المبني العشري؛ يمكنك مواصلة استعمالها خلال البحث، ولكن يحتاج الطالب إلى تمثيلات ورقية ليقوموا بتلوينها. تظهر أوراق العمل وأوراق الرسم البياني لعidan المبني العشري في الجزء الأخير من هذا المقال.

الدرس الأول (يوم واحد)

ستحتاج المعلمة إلى:

* ورقة العمل 1، "قابلية القسمة والعدد 2"؛

* ورقة "الرسم البياني لعidan المبني العشري" المرفقة للعدد 2؛

* قلمي تلوين بلونين مختلفين.

الدرس الثاني (يوم واحد)

- سيحتاج كل طالب إلى:
- * ورقة العمل 2، "قابلية القسمة والعدد 5"؛
 - * ورقة "لعيдан المبني العشري" المرفقة للعدد 5؛
 - * قلمي تلوين بلونين مختلفين.
 - * آلة حاسبة.

الدرس الثالث (1-2 أيام)

سيحتاج كل طالب إلى:

- * ورقة العمل 3، "قابلية القسمة والعدد 4"؛
- * ورقة "الرسم البياني لعيдан المبني العشري" المرفقة للعدد 4؛
- * ورقة العمل 4، "قابلية القسمة والعدد 8"؛
- * ورقة "الرسم البياني لعيدان المبني العشري" المرفقة للعدد 8؛
- * قلمي تلوين بلونين مختلفين.
- * آلة حاسبة.

الدرس الرابع (1-2 أيام)

سيحتاج كل طالب إلى:

- * ورقة العمل 8، "قابلية القسمة والعدد 9"؛
- * ورقة "الرسم البياني لعيдан المبني العشري" المرفقة للعدد 9؛
- * ورقة العمل 6، "قابلية القسمة والعدد 3"؛
- * ورقة "الرسم البياني لعيдан المبني العشري" المرفقة للعدد 3؛
- * قلمي تلوين بلونين مختلفين.
- * آلة حاسبة.

الشكل 1

شركة خيالية تبحث عن فريق لاختراع آلة فرز تستخدم فحوص قابلية قسمة الأعداد

شركة "الأعداد هي نحن"
مكتب الرؤيسين

13 آذار ، 2008

الرياضيون الصغار:

لقد تم جمعكم للعمل كفريق من الباحثين الصغار في قسم البحث والتطوير في شركتنا. إن مهمة فريقكم هي العثور على حل مشكلة أحد زبائننا. هذا الزبون هو شركة الأعداد الكبيرة جداً. وهم يطلبون بأن تقوم شركتنا ببناء آلة فرز تعمل بشكل أفضل من آلة القسمة التي لديهم الآن، التي تفرز الأعداد في دلاء على أساس ما إذا كان العدد الجديد يُقسم على عدد معين. وتستخدم التهم الحالية قسمة طويلة من أجل القيام بهذا الفرز، وتبيّن أن هذا الأمر بطيء جداً حيث أن الأعداد تأخذ بالكبر. نتيجة لهذا البطء، فقد هبط إنتاج الشركة بشكل ملحوظ، الأمر الذي يكلفهم مبالغ طائلة.

ستقوم آتنا بفرز الأعداد في دلوين على أساس ما إذا كان العدد قابل للقسمة على عدد يُضغط على لوحة مفاتيح الآلة. وقد أعطانا الزبون لوحة المفاتيح التي يتبعين علينا أن نستخدمها. تتضمن هذه المذكورة صورة من لوحة المفاتيح ليفكر بها فريقكم عند تطوير طرق مختصرة لعلمانا ليقوموا ببرمجتها في حاسوب آلة الفرز الجديدة هذه.

عند الضغط على مفتاح، من المفترض أن تقوم الآلة بفرز العدد في دلوين، دلو للأعداد القابلة للقسمة على العدد التي تم الضغط عليه ودلو للأعداد غير القابلة للقسمة على العدد الذي لم يتم الضغط عليه.

على سبيل المثال، عند الضغط على العدد 2، تقوم الآلة بفرز أعداد الشركة في دلوين: دلو يحتوي على الأعداد القابلة للقسمة على 2 فقط، والأخر كل الأعداد غير القابلة للقسمة على 2.

لقد قام باحثون باللغون بتزويدكم بعض الإرشادات للتفكير بها في الوقت الذي يباشر فريقكم في العمل على هذه المهمة. ومن أجل أن تجروا طريقة مختصرة، فإنهم يقترحون بأن تتظروا إلى الأنماط في الأعداد القابلة للقسمة على كل عدد. سيتم توزيع ملاحظاتهم وأسئلتهم عليكم عما قريب. إن نجاحكم هام لشركتنا ولزبوننا. يرجى العمل بجد لإنتهاء هذه المهمة في الوقت المناسب.

بااحترام
رئيسا الشركة

المعرفة المسبيقة

الطلاب الذين أنهوا هذا البحث كانوا يعرفون من قبل عيadan المبني العشري ، فهو قيمة المنزلة في الأعداد الكبيرة، الأعداد الزوجية والفردية، العوامل، الضرب ، وقسمة الأعداد المكونة من عدة أرقام. كما وكان الطلاب قادرين على التكهن وتفسير لماذا تبدو تكهنتهم صحيحة.

الدرس الأول: لماذا تعمل علامة القسمة على 2؟

قم بالتحضير لهذا البحث عن طريق إعطاء كل طالب نسخة عن رسالة "الرياضيون الصغار" (أنظر الشكل 1) من رئيس شركه "الأعداد هي نحن" ، وهي شركة وهمية متخصصة في إنشاء آلات أعداد. وكما تنص الرسالة، يتبعن على الرياضيين الصغار تحديد علامات قابلية القسمة على الأعداد 2، 3، 4، 5، 6، 8 و 9 لاستعمال في برمجة آلة فرز الأعداد للزبون، شركة الأعداد الكبيرة جداً. يقال للطلاب أن عملية القسمة الطويلة هي بطبيعة جداً لتحديد ما إذا كان عدد كبير يقبل القسمة على عدد معين. أنهى رياضيونا الصغار بمهارة مهامهم كعاملين وحصلوا على أجراهم بواسطة قطع صغيرة من الحلوى.

للبدء في الفعالية، أسل طلابك إذا كانوا يعرفون أي فحص أو قاعدة لتحديد ما إذا كان عدد يقبل القسمة على 2. أجاب عدد قليل من الطلاب في مجموعتنا أنهم يعتقدون بأنهم يعرفون ذلك. وقال أحد الطلاب، "إذا كان العدد زوجياً، فإنه يقبل القسمة على 2" ، وقال طالب آخر، "إذا كان ينتهي بـ 2، 4، 6 أو 8 فإنه يقبل القسمة على 2". سألا عن الأعداد التي تنتهي بـ 0، فقام الطالب بإضافته بسرعة لقائمة الأعداد.

أسأل الطلاب، "لماذا تعمل هذه الفحوص؟" لم يكن طلابنا متأكدين من كيفية تفسير عمل الإجابات المتباينة، ولكنها مرادفة، في فحص علامات قابلية القسمة على 2.

لتسييل البحث، قم بوضع الطلاب في مجموعات مكونة من أربعة أفراد وبتوزيع ورقة العمل 1 عليهم، "قابلية القسمة والعدد 2" ، مع "ورقة عيadan المبني العشري" المرفقة (أنظر الشكل 2) و ب لأوراق العمل المستكملة التي تعرض عمل الطلاب). أطلب من الطلاب استعمال ورقة عيadan المبني العشري لتمثيل العدد الأول في الرسم البياني : 16، بعدها قم باستعمال الرسم الشفاف لتوجيه طلابك عبر عملية تلوين باستعمال قلمي التلوين على التوالي حيث يقومون أولاً بتلوين مجموعات 2 ابتداءً من العود الكبير (عود العشرة). ويستعمل الطلاب اللونين لمساعدتهم في رؤية المجموعات المختلفة عند تلوين الرسم البياني.

بعدها، أطلب من الطلاب استعمال عيadan المبني العشري للتحقق من عدد مجموعات 2 التي تم تلوينها. بعد أن يفهم الطلاب عملية التلوين وكيفية استكمال الرسم البياني، أطلب منهم تلوين مجموعات المربعات بالنسبة لباقي الأعداد وتسجيل المعلومات في القائمة مع تفهمهم في العمل. قد ترغب في هذا الدرس ، وفي الدروس التالية، في توفير الوقت من خلال الطلب من الطلاب توزيع مهام التلوين بينهم والمشاركة بالمعلومات. ولكن، من المهم أن يقوم كل طالب بتلوين نصف الأعداد على الأقل وذلك لمساعدتهم في رؤية صلة رسومات عيadan المبني العشري بفحوص علامات قابلية القسمة.

بالنسبة للعدد 2، لم يستغرق طلابنا الكثير من الوقت للربط بين التلوين ونتيجة القسمة وبين الباقي. إذا كان طلابك غير قادرين على رؤية هذه العلاقة، أسألهما مباشره: "كيف يرتبط التلوين لنتيجة القسمة ولباقي عندما تقسم عدداً ما على العدد 2؟" أدرك طلابنا أنه لا يحتاجون إلى تلوين كل العيadan لأن كل عود عشرة يحتوي على 5 مجموعات من 2. كان بإمكانهم ضرب عدد عيadan العشرة بـ 5 للحصول على عدد مجموعات 2 الملونة في العيadan. وقد جعلهم هذا الأمر في نهاية المطاف يكتشفون لماذا يعمل فحص علامة قابلية القسمة على 2. أي، لم يترك تلوين جميع عيadan العشرات أي بواقي عند وضعها في مجموعات مكونة من 2. ونتيجة لذلك، حدد الطلاب بأن كل ما يحتاجون القيام به هو رسما عيadan الأحاد المنفردة (الأرقام في منزلة الأحاد)

وما إذا كان من الممكن وضع عيدان الأحاد في مجموعات مكونة من 2. واستنتاج الطالب أن الأعداد التي رقم الأحاد فيها هو زوجي كانت الأعداد الوحيدة القابلة للقسمة على 2. في النقاش الذي يجري في الصف في أعقاب هذه الفعالية، أسأل الطلاب، "إذا كان لدينا عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام مثل 352، هل كانت طريقة فريقك المختصرة تظل تعمل؟ لماذا، أو لماذا لا؟" استمر طلابنا في العودة إلى فكرة أن كل ما عليهم عمله هو النظر إلى الرقم 2 (رقم الأحاد).

لمساعدة الطلاب في تبرير إجاباتهم، أطلب منهم التفكير في عدد العشرات الموجودة في المئة. وبكلمات أخرى، كم عشرة يوجد في 352؟ أجابت طالبة: خمسة وثلاثون." وعندما سئلت لماذا، أجابت، "يوجد في كل 100 عشر عشرات؛ وهكذا يوجد في ثلاث مئات 30 عشرة. بالإضافة إلى الخمسة يكون المجموع 35 عشرة.

بعدها، أكتب ما يلي على اللوح: $35 \times 10 + 2 = 352$ ، الأمر الذي يبين طريقة أخرى لعرض العدد، ويشدد على أن 352 هو عبارة عن 35 عشرة و 2 أحد. تحدث في الصف عن كيفية تمثيل الأعداد على اليسار من رقم الأحاد والتي تمثل مضاعفات للعدد 10، حتى في الأعداد الكبيرة. ونظرًا لكون كل عشرة تقسم على 2، فإننا بحاجة للنظر فقط إلى الرقم الموجود في منزلة الأحاد لرؤية ما إذا كان الرقم قابل للقسمة على 2. أي، عند التفكير في العيدان، يجب علينا التفكير في رقم الأحاد فقط لأنه يمكن عرض جميع العيدان الأخرى كمضاعف لـ 10، ونحن نعرف أن كل عشرة تقسم على 2.

الشكل 2:

طلاب يكتشفون العلاقة بين نتيجة القسمة والباقي عند القسمة على 2 من خلال استكمال ورقة العمل 1 وورقة الرسم البياني المرفقة

Divisibility and the Number Two

Robby

To help you get started, the senior researchers suggest that for each number in the table below your team shade, on the base-ten blocks page provided, as many groups of 2 as possible using different colored pencils. For each number, they suggest that your team record the number of different groups of 2 that can be formed. Also, record the number of squares that could not be put into a group of 2. Dividing up the numbers amongst your team members will prove to be quicker.

Number	Number of groups of two	Number of Unshaded Squares
a) 16	8	0
b) 13	6	1
c) 21	10	0
d) 24	12	0

Number	Number of groups of two	Number of Unshaded Squares
e) 19	9	1
f) 28	14	0
g) 12	6	0
h) 25	12	1

When a natural number is divided by 2 and the remainder is zero, the number is divisible by 2. Using the information in the table above, which of the numbers in the tables should be sorted into the bin that contains only the numbers divisible by 2? Why?

2 fits into the number evenly



If your team were to tell someone a "short cut" for determining if a number is divisible by 2 without dividing, what would it be? Once your team determines a short cut, consult with a senior researcher before your team continues.

The last number in a number has to be even or a zero.

Using your team's "short cut" from above, would 280 be divisible by 2? Explain.

Yes, because the last number is a zero.

Write a 5-digit number that is divisible by 2. Why is it?

13,724. It's divisible by 2 because it ends in an even number.

Write a 6-digit number that is not divisible by 2. Why is it not?

13,7243. The last number in the number is not an even number or zero.

Divisibility and the Number Two
Base-ten Blocks Page

Name: Robby

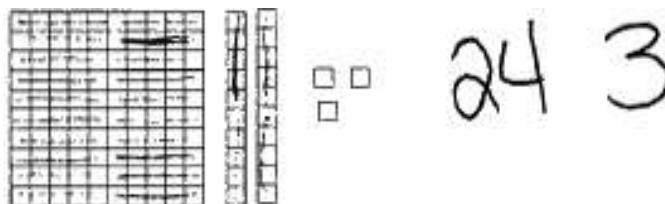
a) 16			8	0
b) 13			6	1
c) 21			10	1
d) 24			12	0
e) 19			9	1
f) 28			14	0
g) 12			6	0
h) 25			12	1

الدرس الثاني: العدد 5 يشبه العدد 2 كثيراً

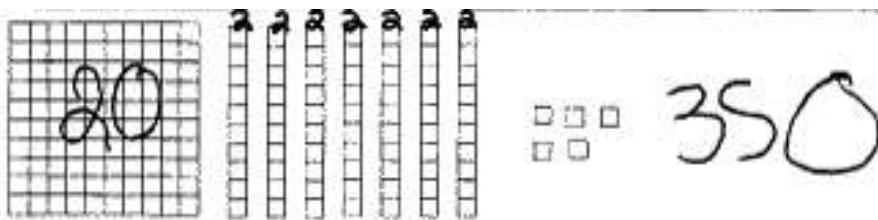
في هذا الدرس، سنكتشف أن العدد الطبيعي يقبل القسمة على 5 إذا كان رقم أحده 0 أو 5. قم بتوزيع ورقة العمل 2، "قابلية القسمة والعدد 5"، مع "ورقة عيدان المبني العشري" المرفقة. نظرًا لكون عود العشرة يحتوي على مجموعتين من 5، فإن الفعالية مشابهة جدًا لفعالية العدد 2. أي أنه أي عود أكبر من عود العشرة اعتباره مضاعف لعود العشرة، ولأن كل عود عشرة قابل للقسمة على 5، فإن أي عود أكبر من عود العشرة قابل للقسمة على 5. لاحظ طلابنا في الوقت الذي لونوا فيه مجموعات من 5 في ورقة "عيدان العشرة" أن مسطح المائة يحتوي على 20 مجموعة من 5 وكل عود عشرة يحتوي على مجموعتين من 5. وسأل عدة طلاب ما إذا كان من الضروري مواصلة تلوين المجموعات المكونة من 5 أو إذا كان يمكنهم كتابة 20 لكل مسطح و 2 لكل عود عشرة (انتظر الشكل 3). وبالطبع، كانت هذه النتيجة المنشودة تماماً.

الشكل 3: عمل هذا الطالب يظهر: أ. مجموعات مكونة من 5 . ب. بديلاً عن التلوين

أ. مجموعات مكونة من 5 في العدد 123 بواسطة التلوين:



ب. بديل عن التلوين في العدد 175:



عكس النقاش في الصف الذي أتى في أعقاب هذه الفعالية الدرس 1 لمجموعات العدد 2. وعززت محادثتنا فكرة أنه في كل عدد طبيعي، الأرقام الموجودة إلى يسار رقم الأحاد تمثل مضاعفات العدد 10، وكعداد طبيعي، لأن 10 قابلة للقسمة على 5، تمثل هذه الأرقام دائمًا عدداً قابلاً للقسمة على 5. وهكذا، بالنسبة للتفكير حول عيدان المبني العشري ، فإن المرة الوحيدة التي ينقسم بها العدد الطبيعي على 5 هي عندما يمكن وضع العيدان (المفردة) التي تمثل رقم أحده في مجموعات مكونة من 5 بدون باق أو عندما لا تكون هنالك عيدان منفردة. ولمساعدة الطلاب في هذه الأفكار، اطرح عليهم السؤال التالي: "إذا كان يسمح لك باستخدام عيدان العشرات وعيدان الأحاد فقط لتمثيل العدد 123 ما هو أكبر عدد من عيدان العشرات التي يمكنك استعمالها؟" فأجاب أحد طلابنا "12".

بعد ذلك، أسلأ طلابك، "هل العدد الذي تمثله 12 عشرة قابل للقسمة على 5؟" أجاب عدد من طلابنا بنعم. وشرح أحد الطالب أنه "لأنه يوجد في عود العشرة مجموعتان من 5، فإنه يوجد في 12 عود 2×12 أو 24 مجموعة تتكون من 5." ولمساعدة طلابك في إجراء تعليم حول هذه الفكرة الهامة، اسألهما ما إذا كانت كل مجموعة من عيدان العشرة تمثل عدداً يقبل القسمة على 5. وأجب العديد من طلابنا بنعم، مفسرين أن "كل عود من عيدان العشرة تحتوي على مجموعتين مكونتين من 5، لذلك فإن مجموعة عيدان العشرة

ستحتوي على ضعف عدد عيadan العشرة في المجموعة." وقد لخصنا هذا الاكتشاف في الصيغة بالطريقة التالية: "أي عدد تمثله مجموعات من عيadan العشرة هو مضاعف للعدد 10، وأن كل 10 تحتوي على مجموعتين من العدد 5، فإن أي مضاعف للعد 10 يقبل القسمة على 5." ولتلخيص أهمية هذا الاكتشاف، عدنا إلى العدد 123. ولأننا نعلم أن العدد الممثل من الأرقام التي إلى اليسار من رقم الأحاد، 120، هو أحد مضاعفات الـ 10 وهو، بسبب ذلك، قابل للقسمة على 5، فإنه لا يبقى لنا سوى أن نحدد ما إذا كان يمكن تشكيل مجموعات تتكون من 5 من 3 وحدات منفردة فقط. في هذه الحالة، لا يمكن وضع 3 في مجموعة مكونة من 5 من دون باق، ولذلك فإن 123 لا يقبل القسمة على 5. ارتكز هذا النقاش على ما اختبره الطلاب من تلوين المجموعات المكونة من 5 في تمثيلات الأعداد ضمن عيadan المبني العشري، وأدى بهم ذلك إلى فهم لماذا لا يقبل العدد الطبيعي القسمة على 5 إلا إذا كان رقم آحاده 0 أو 5.

لتحضير الطلاب لبحث فحص عالمة قابليّة القسمة للعدد 4 في الدرس التالي، أسائل الطلاب "ما هو عدد مسطحات المئة في 4349؟" أجاب أحد طلابنا: "43." وعندما طُلب منه التفسير لماذا، أجاب: "هناك 10 مسطحات مئة في المكعب (مكعب الألف)، ولدينا 4 مكعبات: لذلك لدينا $40 + 3$ من مسطحات المئة".

الدرس الثالث، الجزء الأول: العدد 4 المفتاح في المئة

ستركز "قابليّة القسمة والعدد 4" (انظر ورقة العمل **3**) وورقة "عيadan المبني العشري" المرفقة انتباه الطلاب على الفروق بين تلوين أنواع العيadan المختلفة من عيadan المبني العشري. قم بتوزيع الأوراق على الطلاب في مجموعاتهم الخاصة واطلب منهم استكمالها. وفي الوقت الذي يلوّن فيه الطلاب مجموعات مكونة من 4، سيدركون أن كل مسطح من مسطحات المئة يحتوي على مجموعات كاملة تتكون من 4 من دون باق، ولكن تحتوي كل عود من عيadan العشرة على باق عند تشكيل مجموعات من 4 (انظر الشكل 4).

الشكل 4: يربط عمل الطالب بين عيadan المبني العشري وبين عالمة قابليّة القسمة على 4

ماذا لاحظت مجموعتكم بالنسبة لتلوين مسطحات المئة؟ كيف يختلف ذلك عن تلوين عيadan العشرة وعيadan الواحد؟

*and the slacks don't have leftovers
and the longs and units do*

في مسطحات المئة لا توجد باق وفي مسطحات العشرة توجد باق.

و عندما يكتشف الطالب أن مسطح المئة هو أصغر قطعة يمكن تلوينها في مجموعات من 4 بدون باق، يكونون قادرين على استعمال هذا الاكتشاف لتطوير فحص علامات قابلية القسمة على 4؛ أي يقسم العدد الطبيعي على 4 إذا كان العدد الممثل بواسطة الرقمين الواقعين على الطرف الأيمن (الأحاد وال العشرات) يقسم على 4. على سبيل المثال، لتحديد ما إذا كان العدد 512 قابلاً للقسمة على 4، يحتاج المرء إلى فحص ما إذا كان 12 قابلاً للقسمة على 4.

في المرحلة التالية، أطلب من طلابك التحقق من فحص علامات قابلية القسمة على 4 مع عدد مكون من أربعة أرقام بواسطة استعمال مكعب الـ 1000 (انظر الشكل 5). ويحتاج ذلك الأمر إلى أن يقوم الطالب بتفكيره (توزيع) عدد طبيعي إلى حاصل جمع مضاعفات من 100 وعدد مكون من رقمين. وهذا يعني أنه في كل عدد طبيعي، الأرقام الموجودة إلى يسار رقم العشرات تمثل مضاعفات المئة، ونظرًا لكون مسطح المئة قابلاً للقسمة على 4، يكون هذا الجزء من أي عدد قابلاً للقسمة على 4. ونتيجة لهذه الحقيقة، يدرك طلابنا أنه من أجل تحديد ما إذا كان عدد طبيعي يقبل القسمة على 4، فإن كل ما يحتاجون إلى القيام به هو تحديد ما إذا كان العدد الممثل بعدين العشرة وعدين الأحاد يقبل القسمة على 4.

الشكل 5

العمل مع مكعب ألف المفك يقتضي من الطالب وزيع عدد طبيعي إلى حاصل جمع مضاعفات الـ 100 وعدد ممن رقمين.

فتقروا في تلوين مجموعات مكونة من 4 مكعبات الألف أدناه. هل سكون هنالك أي مربعات غير ملونة؟ اشرحوا. (الإشارة: هل تحتاج مجموعتك بالفعل إلى تلوين جميع المربعات؟ حاولوا حساب عدد مساحات المئة في مكعب ألف المفك وعلاقة مكعب ألف هذا بالتلوين الذي قمتم به في مساحات المئة).

No because 100 is divisible
by 4 and 1,000 is only 100x10,

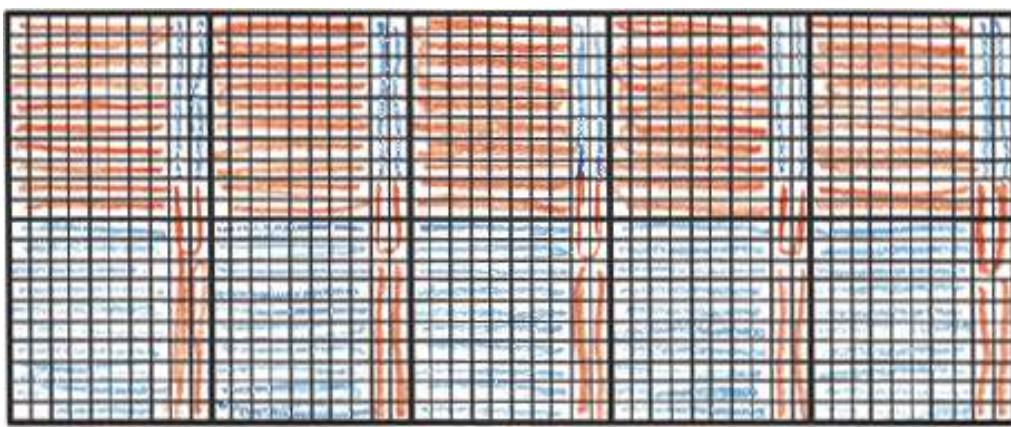
لا، لأن 100 تقسم على 4 و 1000 هو عبارة عن 10×100

للمساعدة في ترسیخ فهم طلابك لفحص علامات قابلية القسمة هذه، أطلب منهم العثور على أصغر وأكبر عدد مكون من أربعة أرقام يقبل القسمة على 4. قام طلابنا بتحديد هذين العددين عن طريق توزيع أعداد طبيعية إلى حواصل جمع عددين، أحدهما معروف بأنه يقبل القسمة على 4، بينما تعين فحص الآخر لمعرفة ما إذا كان يقبل القسمة على 4. وبالتحديد، أعلن العديد من الطلاب أن "أصغر عدد يتكون من أربعة أرقام يقبل القسمة على 4 هو 1000 لأن المكعب "المفك" يقبل القسمة على 4. العدد الأكبر هو 9996 لأن $9996 = 9900 + 96$ ، وكلاهما يقبل القسمة على 4". أظهر توجه طلابنا أنهم اكتسبوا فهماً بأنه إذا كان عدداً يقبلان القسمة على عدد ما فإن حاصل جمعهما يقبل القسمة على نفس العدد. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان أحدهما فقط يقبل القسمة على عدد ما فإن حاصل جمعهما لا يقبل القسمة على نفس العدد. ووضح معظم عمل ومحادثات طلابنا استعمال توزيع الأعداد واستراتيجيات الرياضيات الذهنية عند تحديد قابلية القسمة.

الدرس الثالث: الجزء 2: العدد 8 تسوية المكعب

على عكس الفعاليات المتعلقة بالأعداد 2، 4 و 5، لا تبحث ورقة العمل 4 للعدد 8 في أعداد معينة وإنما في الكيفية التي يمكن فيها تشكيل مجموعات من 8 من خلال استعمال كل نوع من أنواع عيadan المبني العشري. بعد أن بدأت مجموعات طلابنا المكونة من أربعة طلاب في العمل على ورقة العمل للعدد 8، قاموا بسرعة بتحديد أنه لا يوجد في عيadan الأحادي أي مجموعات من 8، وأن عدد العشرة يحتوي على مجموعة واحدة من 8 وربعين غير ملونين، وأن هناك 12 مجموعة 8 في مسطح المئة مع 4 مربعات غير ملونة. ومن خلال معرفة أن مكعب الـ 1000 المفكك يتكون من 10 مسطحات من مسطحات المئة وأن كل مسطح يحتوي على 4 مربعات غير ملونة، تشارك العديد من طلابنا في تعليق يشبه التعليق التالي: "عدد المربعات غير الملونة في مكعب الـ 1000 المفكك هو 40 لأن كل مسطح مئة يحتوي على 4 مربعات غير ملونة، وهناك 10 مسطحات مئة في مكعب الـ 1000، وهذا يعادل 5 مجموعات مكونة من 8. وهكذا، فإن مكعب الـ 1000 يقبل القسمة على 8" (انظر الشكل 6). ونتيجة لذلك، يجب على الطالب أن يفكر ما إذا كان يمكن تلوين مسطحات المئة، عيadan العشرة وعيadan الأحادي بشكل كامل في مجموعات تتكون من 8، لأنه يمكن اعتبار "عيadan كبيرة" كمضايقات لمكعب الـ 1000. وأدرك طلابنا، من هذا الاكتشاف، أن فحص علاماتقابلية القسمة على 8 يحتاج إلى النظر إلى الأرقام الثلاثة على اليمين كعدد كامل وتحديد ما إذا كان هذا العدد المكون من ثلاثة أرقام يقبل القسمة على 8. وبكلمات أخرى، إذا كان العدد المكون من الأرقام الثلاثة من الجهة اليمنى من العدد تقبل القسمة على 8 بدون باق، فإن العدد الأصلي يقبل القسمة على 8. على سبيل المثال، لتحديد ما إذا كان العدد 5160 يقبل القسمة على 8 يجب على المرء أن يفحص ما إذا كان العدد 160 يقبل القسمة على 8.

الشكل 6: تبيّن الألوان مجموعات من 8 في مكعب الألف المفكك

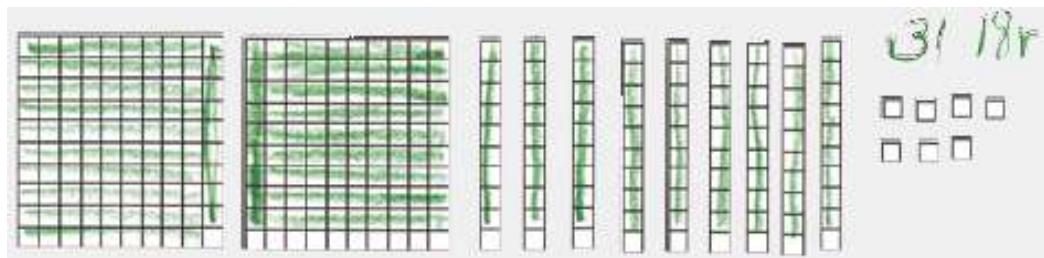


الدرس الرابع، الجزء 1: العدد 9

كل شيء يتعلق بالبواقي

يختلف التوجه المستخدم لفحص علامات قابلية القسمة على العددين 9 و 3 عن التوجه المستخدم في الأجزاء السابقة من البحث. قم بتوزيع ورقة العمل 5 وورقة الرسوم البيانية لـ "عيadan المبني العشري" المرفقة واطلب من الطلاب تلوين مجموعات مكونة من 9 داخل كل عود. تأكد من أنك تشدد على ألا يقوم الطالب بدمج المربعات الباقية وغير الملونة كما فعلوا ذلك في الدروس السابقة. يبيّن الشكل 7 طريقة تلوين أحد الطلاب لعيadan المبني العشري الذي تمثل العدد 297. بعد انتهاء الطلاب من التلوين، قاموا بتسجيل معلوماتهم في الأعمدة 2 حتى 6 من الجدول في ورقة العمل 5 وعندها فقط قاموا بدمج المربعات غير الملونة في مجموعات إضافية مكونة من 9 وأنهوا الأعمدة الثلاثة من الجدول.

الشكل 7: تلوين مجموعات من 9 للعدد 297



النتيجة التي تم الحصول عليها: 31 مجموعة وباق 18
(لم يتم تلوين مجموعة واحدة من 9 في مسطح المئة الثاني عن طريق الخط)

تحتوي ورقة العمل على أسئلة محورية تثود الطلاب إلى اكتشاف هام بأن المجموع الكلي للمربعات غير الملونة لكل نوع من رسماط عيدان المبني العشري يساوي الأرقام في كل منزلة من منازل العدد الذي يتم بحثه. على سبيل المثال، يوجد للعدد 297 مربعين غير ملونين في مسطحات المئة (رقم المئات)، 9 مربعات غير ملونة في عيدان العشرات (رقم العشرات) و 7 مربعات غير ملونة في الوحدات (رقم الأحاد). أدرك الكثير من طلابنا هذه الحقيقة وأنه يمكن دمج المربيعات غير الملونة إلى 18 في مجموعتين مكونتين من 9 وبدون بواق. ونظرًا لكون عدد المربيعات غير الملونة لكل منزلة يساوي الرقم الموجود في تلك المنزلة، بدأ الطلاب في التفكير في ما إذا كان يمكن استعمال الأرقام في عدد معين لتشكيل مجموعات مكونة من 9. على سبيل المثال، قال بعض الطلاب $2^2 + 7 = 9$ يساوي 9، وبعدها 9 إضافية، إذا 297 تقبل القسمة على 9." أدرك طلاب آخرون أن مجموع الأرقام يساوي مجموع المربيعات غير الملونة؛ عندما قرروا ما إذا كان العدد يقبل القسمة على 9. اكتشف طلابنا أنه "إذا كان مجموع أرقام عدد طبيعي يقبل القسمة على 9، فإن العدد الطبيعي يقبل القسمة على 9."

الدرس الرابع: الجزء 2: العددان 3 و 9 أخوان توأمان

صممت هذه الفعالية لتبيين للطلاب أن فحص علامة قابلية القسمة على العدد 3 يشابه فحص علامة قابلية القسمة على العدد 9. قم بتوزيع ورقة العمل 6 وورقة رسماط "عيدان المبني العشري" المرفقة للعدد 3. سرعان ما أدرك الطالب بعد البدء بالعمل على أوراق العمل، أنه عند تلوين مجموعات تتكون من 3 ضمن الأنواع المختلفة من عيدان المبني العشري، يبقى دائمًا مربع غير ملون، كما هو الحال عند تلوين 9. أدى هذا الاكتشاف بسرعة، كما كان متوقعاً، إلى أن يدرك الطالب أن "العدد الطبيعي يقبل القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات لـ 3" أو "إذا كان حاصل جمع أرقام العدد يقبل القسمة على 3".
أسأل، خلال النقاش في الصف، "إذا كان عدد يقبل القسمة على 9، هل هذا يعني أنه يقبل القسمة على 3؟"
أجاب طلابنا بنعم قاطعة. وعندما سئلوا لماذا، أجاب أحد الطلاب لأن حاصل جمع الأرقام سيكون قابلاً للقسمة على 3 حيث أن 9 هي مضاعفات العدد 3. أسأل أيضًا "إذا كان عدد ما يقبل القسمة على 3، هل هذا يعني أنه يقبل القسمة على 9؟" أدى هذا السؤال إلى الحصول على مزيج من الإجابات حتى ذكر أحد الطلاب العدد 6، الذي يقبل القسمة على 3 لكن ليس على 9.

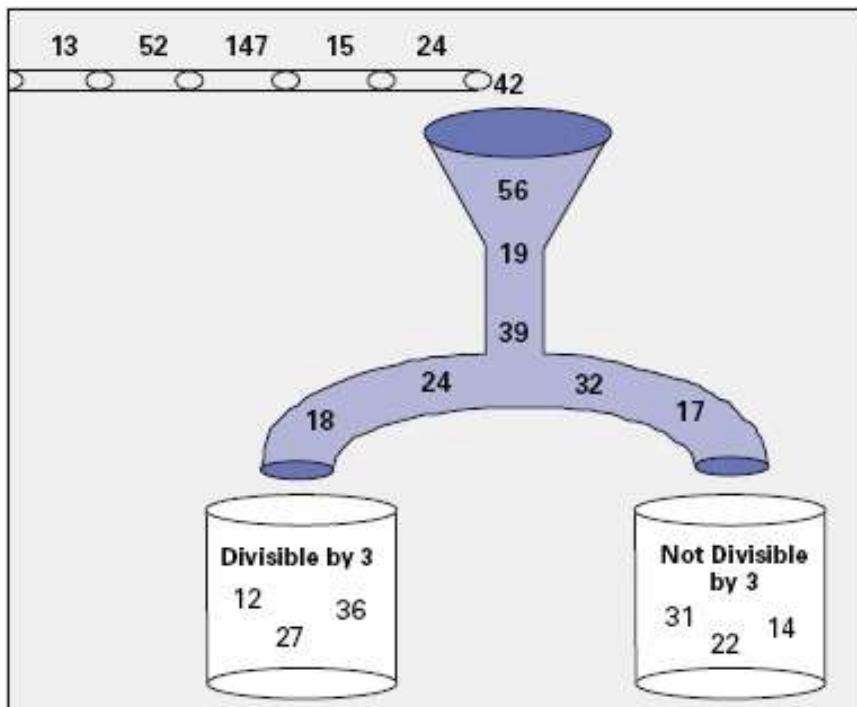
ما وراء الدرس

تشتمل أوراق العمل أيضاً قابلية القسمة والعدد 6" (انظر ورقة العمل 7) وذلك من أجل البحث في فحص علامات قابلية القسمة على العدد 6. يشمل هذا البحث للعدد 6 الفحوص المعروفة للعديدين 2 و 3 وهو متاح للطلاب عن طريق التعرف على النمط. بعد استكمال الجدول، سرعان ما رأى طلابنا أنه كلما كان عدد يقبل القسمة على 6 فإنه يقبل القسمة أيضاً على 2 و 3. وقد أدى بهم ذلك إلى الزعم بأن "إذا كان عدد يقبل القسمة على 2 و 3 فإنه يقبل القسمة على 6".

تحدثنا خلال نقاش في الصف بشكل عام عن استعمال فحوص علامات قابلية القسمة المعروفة لأعداد أخرى. وقنا لطلابنا، "لقد اكتشفنا للتو أنه إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 و 3 فإنه يقبل القسمة على 6. هل تعتقدون أنه إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 و 4 فإنه يقبل القسمة على 8؟" اعتقاد العديد من الطلاب أنه سيكون قابلاً للقسمة على 8 حتى قال أحد الطلاب "أنه صحيح بالنسبة لبعض الأعداد ولكن ليس لجميعها". واكتشف الطالب أن أعداداً مثل 4 و 12 تقبل القسمة على 2 و 4 ولكن ليس على 8. ناقشنا لماذا الأمر صحيح بالنسبة لـ 2 و 3 مع 6 ولكن ليس بالنسبة لـ 2 و 4 مع 8. الحقيقة الهامة هي أن ليس لدى 2 و 3 أي عوامل مشتركة غير العدد 1، ولكن يوجد للعددين 2 و 4 العامل 2. أدى هذا الغوار إلى نقاش عام بشكل أكبر حول الفحوص المختللة لأعداد أخرى. على سبيل المثال، من الممكن استعمال فحصي العددين 3 و 4 مع العدد 12، ولكن لا يمكن استعمال فحصي العددين 2 و 6. وعرض الطالب خلال محادثتنا فحصاً آخر لقابلية القسمة: استعمال فحوص العددين 3 و 5 مع العدد 15؛ استعمال فحصي العددين 2 و 9 مع العدد 18؛ استعمال فحصي العددين 3 و 8 مع العدد 24 (ولكن لا تستخدم فحصي العددين 4 و 6 للعدد 24).

من الممكن أن يوفر تخيل الله فرز مثل الآلة التي ذكرت في هذا المقال منصة قفز إلى مفاهيم رياضية أخرى. على سبيل المثال، ضمن سياق استعمال هذه الآلة لفرز أعداد تقبل القسمة على عدد معين عن أعداد لا تقبل القسمة على نفس العدد، يمكنك أن تقدم أو أن تعزز مفهوم الدالة. وهذا يعني أن يدخل عدد إلى الآلة كالمدخل، ويمكن أن يكون له نتيجة من نتيجتين، إما أنه "يقبل القسمة على عدد معين" أو "لا يقبل القسمة على العدد المعين" (انظر الشكل 8). بالإضافة إلى ذلك، يمكننا استعمال آلة الفرز للبحث في مسألة المضاعفات المشتركة. إذا كنا نبدأ بلاء فارغة ونقوم بفرز الأعداد الطبيعية في مجموعات من 3 وبعدها نأخذ الأعداد التي تقبل القسمة على 3 وفرزها في مجموعات من 5، الأعداد الموجودة الآن في دلو "قابلية القسمة على 5" هي مضاعفات مشتركة لـ 3 و 5. نتيجة لهذه العملية، أصغر قيمة للأعداد في دلو "قابلية القسمة على 5" هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3 و 5، أو 15؛ والأعداد التي في دلو "قابلية القسمة على 5" هي جميعها مضاعفات موجبة للعدد 15.

الشكل 8: آلة فرز تعرض دالة يمكنها أن تنتج نوع واحد فقط من منتجين.



التفكير

كما أشرنا إلى ذلك سابقاً، توفر هذه الفعاليات بيئة للطلاب لبدء اكتساب تقدير للنتائج المنشودة الواردة في "معايير عملية التفكير والإثبات". أدت الفعاليات في هذا البحث إلى أن يقوم طلابنا باكتشاف فحوص علامات قابلية القسمة من خلال استعمال أنماط التعرف عن طريق الرسمات والجداول. بالإضافة إلى ذلك، الأنماط التي لاحظها الطلاب أرشدتهم إلى فهم صحة وشرعية علامات قابلية القسمة. انهوك الطلاب خلال هذه الفعاليات في حوار اقتضى منهم تقييم فهم الرياضيات والادعاءات الرياضية لدى بعضهم البعض. ويدرك الطلاب، خلال مثل هذه الفعاليات والنقاشات في المجموعة، أن التفكير والتحليل هما جانبان أساسيان من جوانب الرياضيات.

أوراق عمل مرفقة

المراجع

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.