איפיוני למידה וחשיבה
של תלמידים "חלשים" במתמטיקה

דו"ח מסכם לשנים 2000-2002
מוגש למשרד החינוך

ד"ר רוני קרסנטי
פרופ' אברהם הרכבי

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

ינואר 2003
שבט תשס"ג

תוכן העניינים:

מבוא .... עמ' 2

רקע תיאורטי: סקירת הספרות הקיימת בנושא תלמידים
מתקשים במתמטיקה .... עמ' 4

איסוף הנתונים .... עמ' 21

ניתוח ראיונות אינדיווידואליים .... עמ' 22

ניתוח אינטראקציות בין תלמידים .... עמ' 76

ניתוח סיטואציות כיתתיות: אינטראקציות מורה-תלמידים ..... עמ' 83

סיכום .... עמ' 108

ביבליוגרפיה .... עמ' 117

מבוא.

דו"ח זה מסכם שלוש שנות עבודה מחקרית בנושא תלמידים חלשים[1] במתמטיקה בחטיבות הביניים. הפעילות אליה מתייחס הדו"ח תוכננה ובוצעה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן בתמיכת מל"מ ומכון ויצמן. הדו"ח מבוסס על הספרות הקיימת בתחום, על תצפיות בכיתות וראיונות עם תלמידים, ועל דיונים במסגרת קבוצת עיון שהתמקדה בתלמידים חלשים. הדו"ח כולל בתוכו חלקים משני דו"חות הביניים שהוגשו בתום שתי השנים הראשונות (הרכבי, 2000, קרסנטי והרכבי, 2001), אך מרחיב במידה ניכרת הן את הרקע הספרותי-תיאורטי והן את הנתונים, הממצאים וההמלצות.

אחת המטרות המרכזיות הניצבות במוקד ה"אני מאמין" של המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן היא, כי הפעילויות המתבצעות במסגרת המחלקה תבאנה בחשבון את כלל אוכלוסיית הלומדים, על רמותיה השונות. הצוותים השונים במחלקה מתייחסים לעבודה בכיתות הטרוגניות כמו גם לעבודה בקבוצות המחולקות על פי רמה. הפעילויות משתלבות למהלך אינטגרלי הכולל שלושה היבטים: פיתוח תכניות לימודים, השתלמויות מורים ומחקר.

בהתאם לכך, גם הפעילות המתייחסת לאוכלוסיית התלמידים החלשים במתמטיקה, התפרשה על פני שלושת ההיבטים הללו. צוותי קבוצת המתמטיקה של המחלקה להוראת המדעים פיתחו ספרי לימוד באלגברה ובגיאומטריה המיועדים לתלמידי רמות ג' בחטיבת הביניים, וסדרה מיוחדת עבור תלמידי תיכון הלומדים בכיתות מב"ר לקראת שלוש יחידות במתמטיקה (תכנית ש"י). קיים מערך של השתלמויות מורים וחומרי הנחיה המתמקד בהוראת תלמידים חלשים באמצעות חומרי הלמידה הללו. עשייה זאת מלווה ונתמכת על ידי פעילות מחקרית-תיאורטית הנוגעת לעבודה עם תלמידים חלשים. הדו"ח שלפנינו מתעד פעילות מחקרית זו, אך יודגש כי אנו רואים בדו"ח חלק ממהלך שלם של פיתוח-הוראה-מחקר. במסגרת הדו"ח נתייחס לדוגמאות של עבודות תלמידים הלקוחות מתוך חומרי הלמידה שפותחו במכון ויצמן, ולסיטואציות של הוראה המיישמת תכניות לימודים אלה. בנוסף, נדון בלמידה של תלמידים חלשים באופן כללי, ללא קשר לחומרי למידה מסוימים.

המטרה העיקרית של הדו"ח היא להתעמק בהבנת תהליכי חשיבה מתמטית המתרחשים אצל תלמידים המסווגים כ"חלשים" ומנותבים לרמות ג' (או במקרים מסוימים לרמות ב' נמוכות) בחטיבת הביניים. הדו"ח מבליט את יכולות התלמידים הללו, בצד החסכים

[1] להלן נשתמש במונח "חלשים" לצורך פישוט התקשורת, אם כי מונח זה אינו משקף כלל את רוב התלמידים המקוטלגים תחת שם זה. בהמשך הדו"ח נחשוף יכולות של תלמידים אלה ונתהה על הסיבות ל"חולשתם".

הקיימים אצלם. בכוונתנו להראות באמצעות הדו"ח כי תלמידים אלה הם בעלי כשרים מתמטים המאפשרים התמודדות מוצלחת עם לימודי מתמטיקה. חלק לא קטן של התלמידים הללו עשוי להשתלב בהצלחה בכיתות מכוונות-בגרות, בתנאי שיזכו להוראה ההולמת את כישוריהם וצרכיהם. בדו"ח מובאים ניתוחים של סיטואציות הוראה ולמידה בהן צפינו במהלך ביקורים בכיתות שונות. סיטואציות אלה אינן מתיימרות להציג תמונה ורודה של המציאות, כי אם לתאר יכולת מהולה בקשיים אשר אפשר לזהות בה גרעין של הצלחה אפשרית. הממצאים מצביעים על אפשרויות לקידום תלמידי רמות ג', וכמו כן על תוואי אפשרי של עקרונות אשר עליהם אפשר לבסס יצירה והפעלה של חומרי למידה המתאימים לרמות אלה בחטיבת הביניים. פן נוסף המודגש בדו"ח הוא הצורך לשנות את תפיסתם של חלק ממורי המתמטיקה כלפי תלמידים אלה ובעקבות זאת את גישת ההוראה. נציין, כי אמנם רוב התלמידים שנצפו ושרואיינו במסגרת הפעילות המתוארת בדו"ח זה (ובדו"חות הביניים שקדמו לו) הם תלמידי חטיבות הביניים, אולם לדו"ח הוכנסו גם דוגמאות המתייחסות לתלמידי החטיבה העליונה. הסיבה לכך היא שלדעתנו חשוב לעקוב גם אחרי תלמידים בוגרים יותר, אשר למרות היותם מוגדרים כחלשים, הם מתמודדים בדרכים מעניינות עם חומר מתקדם.

מבנה הדו"ח. הדו"ח פותח בסקירת הספרות העדכנית הקיימת בנושא תלמידים מתקשים במתמטיקה. לאחר מכן מופיעים ממצאי העבודה, המובאים בסדר של מעגלי התייחסות מתרחבים: תלמיד בודד, אינטראקציות תלמיד-תלמיד, אינטראקציות כיתה-מורה.
בראש ובראשונה נתמקד בתלמידים שאופני החשיבה שלהם תועדו אינדיווידואלית באמצעות ראיונות. חלק זה הוא רחב היקף ולמעשה מהווה את מרכז הדו"ח. הטעם לכך הוא, שבדרך של מעקב "אחד על אחד" אחרי חשיבה של תלמיד או תלמידה יחידים ניתן להתחקות באופן מעמיק אחרי תופעות בעלות חשיבות רבה, לדעתנו, הנוגעות ליכולות - כמו גם למקורות הכישלון - של תלמידים חלשים. לאחר מכן נתאר התנהגויות של תלמידים המתייחסים זה לזה במסגרת של עבודה עצמית, כפי שנצפו במהלך ביקורינו בכיתות. לבסוף נעסוק בניתוח של סיטואציות כיתתיות כאשר הדגש הוא על המורה.

1. רקע תיאורטי: סקירת הספרות הקיימת בנושא תלמידים מתקשים במתמטיקה.

בסעיף זה נציג סקירה מסכמת של הספרות הרלוונטית לנושאים המופיעים בדו"ח זה. נחזור על רעיונות מרכזיים שהופיעו בשני הדו"חות הקודמים (הרכבי, 2000, קרסנטי והרכבי, 2001), בשילוב עם מקורות עדכניים ורעיונות נוספים להשלמת התמונה הכוללת.

תחילה נתייחס לספרות הותיקה יחסית, הנוגעת לתפיסות שגויות של תלמידים, ולתפניות שחלו בעשור האחרון בהקשר לתפיסות מוטעות. לאחר מכן נסקור בקצרה את כיווני המחקר המובילים כיום. לבסוף נתמקד בסקירת עבודתו של דניאל חזן (Chazan, 2000), אשר באמצעותה ניתן להסביר ולהדגים נקודות חשובות שהן רלוונטיות במיוחד לנושא של תלמידים מתקשים.

I. תפיסות מוטעות, משנות השמונים ועד לעשור הנוכחי: אבולוציה של התייחסות לשגיאות תלמידים.

אחד הממצאים המרכזיים של מחקרים רבים הקשורים ללמידת מתמטיקה ב- 25 השנים האחרונות, ובפרט בשנות ה- 80, הוא שתלמידים מפתחים "תפיסות מוטעות" (misconceptions). תפיסות מוטעות הן דעות ורעיונות מוצקים, יציבים, בעלי כוח הסבר, אך שונים מאוד מהרעיונות המקובלים בתחום התוכן. תפיסות מסוג זה הן נחלתם של תלמידים רבים גם כאשר המושגים "הנכונים" נלמדים באופן מפורש במהלך לימוד פורמלי.

תפיסות מוטעות הוא השם הנפוץ לתופעה זו, אך הספרות המקצועית מביאה כינויים נוספים (שאולי משקפים הבדלים מסוימים בגישה) כמו "תפיסות אלטרנטיביות" (למשל, Clement, 1982) "פְּרֵה-קונספציות" (למשל, Hewson & Hewson, 1984), "אמונות נאיביות" (למשל, McCloskey, Caramazza and Green, 1980), "תיאוריות נאיביות" (Resnick, 1983). אמנם המחקרים שהצטברו בנושא זה אינם אחידים מבחינת הרקע התיאורטי והמתודולוגיות בהן השתמשו החוקרים, אך ניתן לראות אפיונים משותפים למחקרים שונים. להלן כמה מהם.

א. קיום תפיסות מוטעות אצל תלמידים משמעותו דחיית הגישה של "טבולה ראסה". כלומר, גם לפני הוראת מושגים בתחום התוכן, יש לתלמידים תפיסות בעזרתן הם מתארים ומסבירים לעצמם תופעות מתמטיות או מדעיות. כאמור, תפיסות אלה שונות מהמקובל בתחום, אך כיוון שהן מנווטות את החשיבה, הן "מתערבבות" עם החומר הנלמד (לעתים אף "מתגברות עליו") ולכן יש לקחת אותן בחשבון ולהתייחס אליהן בהוראה.

ב. מקורן של התפיסות המוטעות הוא למידה הנובעת מהתנסות לא פורמלית עם העולם הפיסיקלי והתרבותי הסובב אותנו, שעליה נוספת ההתנסות הבית ספרית. במתמטיקה

קיימים מנגנוני חשיבה הנחשבים למקורן של חלק מהתפיסות המוטעות. אחד ממנגנונים אלה הוא הכללת יתר של חוקיות או חוק, (למשל, "כפל תמיד מגדיל"), השפעות פרצפטואליות ("ריבוע שעומד על אחד מקדקודיו אינו נתפש יותר כריבוע"), שימוש לא נכון בחוקי הלוגיקה ("אם A אז B, גורר אם B אז A"), ועוד.

ג. תפיסות מוטעות אינן השערות רגעיות אותן ניתן לדחות בקלות, אלא דעות יציבות לאורך זמן באוכלוסיות גדולות, אשר לעיתים קרובות זוכות להגנה עיקשת מצד מי שמחזיק בהן. גם לאחר הוראה מפורשת, תלמידים רבים ממשיכים להחזיק באותן תפיסות המתגלות כעמידות בפני שינוי. לעתים ההוראה מצליחה ללמד את המושגים הנכונים אך התפיסות המוטעות לא נזנחות בקלות והן "מתחרות בידע הנכון". חוקרים רבים מצביעים על כך כעל אחד הקשיים הגדולים ביותר בהוראה.

ד. על ההוראה "להחליף" את התפיסות המוטעות בתפיסות המומחה כך שהלמידה תהיה בו-זמנית תהליך של "רכישת" מושגים חדשים ו"עקירה" של תפיסות מוטעות. לשם כך, יש צורך במחקר על מנת לזהות תפיסות מוטעות וכן את מקורן. בעקבות זאת יש לעצב שיטות הוראה מתאימות הלוקחות בחשבון את התפיסות המוטעות ואת מקורן ומנסות להחליף אותן ב"תפיסות הנכונות".

החל משנות ה- 90, חולקים חוקרי קוגניציה על הרוח שמאחורי התיאוריות והמחקרים הנפוצים בספרות בנושא תפיסות מוטעות. מצד אחד, החוקרים החדשים אינם מתווכחים עם ממצאי המחקר של ספרות שנות ה- 80. כלומר, אין מחלוקת על כך שתלמידים, בדרך אל "המומחיות", הם בעלי תפיסות מוטעות. כמו כן אין מחלוקת על סוג התפיסות שזוהו ותוארו. אך מצד שני החוקרים הללו חלוקים מאד לגבי האופי של אותן תפיסות והדרך להתמודד איתן. טענתם העיקרית היא כי בחלק גדול מהתפיסות המוטעות יש גרעין של "נכונות" מקומית, אשר הכללתה לתחומי יישום רחבים מולידה תפיסה "לא נכונה". סמית' ושותפיו (Smith, diSessa & Roschelle, 1993), שהם בין נציגיה של גישה זו, טוענים כי למידה היא בנייה של ידע חדש המאופיין על ידי שינוי, עידון והרחבה של מבנים קוגניטיביים קיימים ולא על ידי החלפתם. הם אינם מתייחסים לתפיסות מוטעות כאל מכשול, אלא כאל גרעין שעליו ייבנה ידע חדש, "נכון" ורחב יותר. אותה בנייה תעשה על סמך היכולות וכישורי הלמידה של התלמידים, תוך שילוב הכרחי של הידע האינטואיטיבי המוקדם שלהם. על פי השקפה זו, אין מקום לשרש תפיסות מוטעות ולהחליפן בתפיסות הנכונות, משום ש:

א) על פי רוב שיטה זו אינה עובדת (כפי שהספרות הקלאסית על תפיסות מוטעות מראה זאת בעצמה) .

ב) כל ידע ייבנה על ידע מוקדם תוך שילוב יכולות התלמידים, גם אם הידע המוקדם הוא בחלקו "מוטעה".

באופן טבעי ניתן היה לצפות כי בעקבות תפנית זו בהתייחסות לשגיאות של תלמידים, יחול שינוי מסוים במוקדי ההתייחסות של מחקרים חדשים בחינוך המתמטי, ובהם גם כאלה העוסקים באוכלוסיות חלשות: מאחר שהקשיים והטעויות של תלמידים כבר תועדו ונותחו בהרחבה, והדגש מושם על ניצול הידע הקיים של התלמיד וצמיחה מתוכו, נוצרה קרקע מתאימה למחקר בכיוונים חדשים אשר יפתחו קו רעיוני זה או יציעו אפיקים מקבילים. אכן, בשנים האחרונות הופיעו מחקרים המבקשים להרחיב את נקודת המבט מעבר לשאלות של "במה תלמידים חלשים במתמטיקה מתקשים", ולהסביר את התופעה של חוסר הצלחה במתמטיקה באמצעות התבוננות במציאות הסובבת את התלמידים החלשים בתוך בית הספר ומחוצה לו. נסקור כמה מן המחקרים הללו בתת-סעיף II להלן. גם בדו"ח זה, העוסק בתלמידים מתקשים בחטיבת הביניים, נשאף לעבור משאלות בנוסח "מהי מהות הקשיים" לשאלות כגון מהו אופי הידע הקודם של תלמידים אלו, מהן היכולות שלהם וכיצד ניתן לרתום אותן לצורך למידה משמעותית ומוצלחת יותר. הפעילות שתוצג בדו"ח זה משתלבת אפוא בספרות העכשווית, אך מדגישה יותר את האפשרויות להצלחה בקרב תלמידים שמקובל להדביק להם תווית של כשלון.

II. מחקר בחינוך המתמטי של אוכלוסיות "חלשות": כיווני מחקר עכשוויים.

להלן נסקור ארבעה מכיווני המחקר המסתמנים מתוך עיון בספרות שהופיעה בשנים האחרונות.

1. הכיוון הראשון הוא הכיוון החברתי; להקשרים החברתיים של הוראת מתמטיקה לתלמידים חלשים ישנה חשיבות שאין להתעלם ממנה. כבר נאמר כי תיעוד הקשרים בין כוחות סוציו-היסטוריים, קהילתיים, בית-ספריים ובין-אישיים הוא "הכיוון הקשה ביותר, ואף הנחוץ ביותר, של המחקר העתידי על הישגים דיפרנציאליים במתמטיקה" (Reyes & Stanic, 1988, תרגום מעמ' 33). מאז תחילת האלף השלישי כבר פורסמו מספר ספרים של חוקרים המתבוננים בלמידת מתמטיקה מפרספקטיבות סוציולוגיות שונות. על קטגוריה זו נמנה למשל ספרו של מרטין (Martin, 2000), חוקר ממוצא אפרו-אמריקני המנסה להתמודד עם הפרדוקס הלא פתור של קהילת המוצא שלו בנושא מתמטיקה: מוטיבציה רבה מחד והישגים נמוכים מאידך. מרטין מסביר גורמי הצלחה וכישלון במתמטיקה באמצעות מושגים סוציולוגיים-אתניים כגון שדרים משפחתיים, מורשת היסטורית של מניעת הזדמנות שווה, תרבות על פיה כשלון במתמטיקה מקנה "תו תקן" חברתי, ועוד. ספרם של מוזס וקוב (Moses & Cobb, 2001) מעגן את נושא ההשכלה המתמטית בקונטקסט של זכויות אזרח. מוזס וקוב טוענים, כי מניעת הזדמנות שווה ללמידת מתמטיקה היא למעשה סוג של אפליה, אשר מזכירה את האופן בו הופלו אפרו-אמריקנים בשנות השישים במדינת מיסיסיפי בארה"ב: זכות הבחירה במיסיסיפי הותנתה ביכולת לקרוא ולכתוב, כפי שנמדדה באמצעות

מבחנים. כתוצאה, הרוב המכריע של התושבים השחורים בדלתא של המיסיסיפי נותרו משוללי זכות בחירה ובעקבות זאת משוללי כל יכולת להשפיע על גורלם. בשנות השמונים, על פי מוזס וקוב, שרר מצב דומה בבתי הספר בקיימברידג', מסצ'וסטס, כאשר הקבצות האלגברה שימשו כמסנן המקשה על ילדי מיעוטים ושכבות חלשות להגיע לרמה הנדרשת על מנת להתקבל לקולג'. מוזס הוביל באזור זה מהלך של שינוי קוריקולרי בשיתוף הקהילה, שנודע בשם "פרוייקט האלגברה" (AP) ואשר התפשט בשנות התשעים ל- 12 מדינות נוספות. הפרוייקט נושא אופי מוצהר של תנועה חברתית, כאשר אחת מן המטרות היא שבוגרי הפרוייקט יחזרו אליו כמורים וישמשו כמודל הזדהות עבור התלמידים הצעירים. בבריטניה, קופר ודון (Cooper & Dunne, 2000) מתמקדים בנושא ההערכה של הישגים במתמטיקה בקרב תלמידי בתי ספר יסודיים וחטיבות ביניים, ומראים שלרקע החברתי משקל לא מבוטל בקביעת ציוניהם של תלמידים. במחקרם המקיף על מבחני ההערכה הארציים הבריטיים (National Curriculum tests), השוו קופר ודון בין ציוני תלמידים כפי שהתקבלו מתוך סולמות ההערכה המצורפים למבחנים, ובין הערכתם את הידע וההבנה של אותם תלמידים באמצעות ניתוח תשובותיהם לשאלות המבחן במסגרת ראיונות אישיים. ההשוואה העלתה, כי ילדים רבים ממעמד הפועלים (מה שמכונה באנגליה בשם "working class"), אינם מפגינים במבחנים את הידע וההבנה המתמטיים שיש להם בפועל. המקור לתופעה זו, על פי החוקרים, הוא בכך שהילדים אינם מבחינים בגבולות הקיימים בין ה"מציאותיות" שמציגות השאלות, הלקוחות מחיי היומיום, ובין התשובות המתמטיות ה"נאותות" שהם מצופים להפיק מן הנתונים היומיומיים הללו. במילים אחרות, הבעיה של ילדים מרקע חברתי נמוך היא, לעתים קרובות מדי, הבנה לא מספקת של "חוקי המשחק" יותר מאשר הבנה לא מספקת של התוכן המתמטי. הדוגמא הבאה לקוחה מן הספר (Cooper & Dunne, 2000, pp. 46-47). לשני תלמידי כיתה ו', דיאן, בת המעמד הבינוני, ומייק, בן מעמד הפועלים, הוצגו תרשימי התפלגות של סוגי הגרביים שנלבשו ביום מסוים בבית הספר (גרביים לבנות, שחורות, מדוגמות וכו'), על ידי 30 בנים ו- 35 בנות. בתרשימים נראה כי גרביים מדוגמות נלבשו על ידי 20% מהבנים וכמו כן על ידי 20% מהבנות. התלמידים התבקשו להתייחס למשפט הבא: "יותר בנות מבנים לבשו גרביים מדוגמות". דיאן, שאמנם העירה כי "בדרך כלל בבתי ספר יש יותר בנים מבנות", הצליחה להתנתק מן ההתייחסות למציאות ולא לתת לה עדיפות על פני הנתונים, וקבעה שהמשפט נכון משום ש"למרות שזה אותו יחס, יש יותר בנות". מייק, לעומת זאת, נכנס לדיון שלם בדבר האמת שבנתונים, וטען שבנים כמעט שאינם לובשים גרביים מדוגמות. כתוצאה מכך לא הצליח, למעשה, לענות על השאלה. הספר משופע בדוגמאות דומות, וההבדל בין תשובות כשל דיאן ומייק נמצא כאמור קשור לרקע החברתי של התלמידים.

זווית הראיה החברתית מאפיינת גם מחקרים בהם הקהילה הנחקרת היא מצומצמת יותר: כיתת המתמטיקה עצמה. חזן (Chazan, 2000) מתאר בספרו את המרקם החברתי של כיתת תלמידים חלשים בארה״ב, והשפעתו על שינויים בגישת ההוראה. בהמשך נראה כי ניתוחיו של חזן עשויים להיות רלוונטיים גם לגבי תלמידים חלשים בישראל.

2. הכיוון המחקרי השני, שהוא משמעותי ביותר לגבי דו״ח זה, עניינו תיעוד ההבדלים בין האסטרטגיות שנוקטים בהן ילדים (וכן מבוגרים) כאשר הם מתמודדים עם בעיות מתמטיות מחוץ לכותלי בית הספר, ובין אסטרטגיות בית-ספריות. על סוג זה של מחקר נמנות עבודותיהן של חוקרות כג׳ין לייב וטרזינה נונס, עבודות שכבר הפכו לציוני דרך בנושא. לייב (Lave, 1988) מצאה כי מבוגרים שנצפו בעת שערכו קניות בסופרמרקט ביצעו חישובים שונים, בעיקר חישובי כדאיות, בהצלחה (אחוז טעויות מזערי) תוך שימוש באסטרטגיות מגוונות וגמישות שלא נלמדו במסגרת חינוך פורמלי ואשר נוצרו אד-הוק. כאשר אותם מבוגרים התמודדו עם בעיות חשבון אלמנטריות שהוצגו להם בשאלון כתוב ובראיון בעל-פה, הם השתמשו בפרוצדורות ״קשיחות״ הנלמדות בבית הספר ואחוז הטעויות עלה לכ-30% בממוצע. נונס וחובריה (Nunes et al., 1993) מצאו, בין היתר, כי רוכלי רחוב צעירים בברזיל (בגילאים 9-15) ביצעו במהלך עבודתם חישובים - אשר ככל הנראה עוצבו על ידם - בקלות רבה הרבה יותר מאשר חישובים דומים שהוצגו להם במונחים של תרגילים מבית הספר. האסטרטגיות שננקטו במהלך העבודה בשוק, שהתבססו על חישובים מנטליים, היו שונות לחלוטין מאלה שננקטו במבחן הפורמלי שבו ניסו הילדים להפעיל, על פי רוב ללא הצלחה, רוטינות של חיבור וכפל שלמדו בבית הספר. בהקשר זה אפשר להזכיר גם את דיווחו של הרנדון (Herndon, 1971), מורה למתמטיקה בחטיבת ביניים אמריקאית שעבד עם תלמידים שנפלטו מכיתות רגילות. הרנדון תיאר את ניסיונו לגשר בין שיעורי המתמטיקה לבין הפעילות המתמטית של תלמידיו מחוץ לבית הספר במהלך עבודה או קניות. הניסיון נכשל: אחת הדוגמאות שמביא הרנדון היא של תלמיד שעבד אחר הצהרים כמסכם נקודות של ליגת כדורת (bowling league scorer). תלמיד זה היה מסוגל לעסוק במספר סיכומים בו זמנית וללא כל טעות, אך לא יכול היה לפתור בעיית באולינג פשוטה ביותר במסגרת שיעור בבית הספר. ממצאי המחקרים הללו מפנים את תשומת הלב לאי יכולתה של המתמטיקה הבית ספרית להתחבר ליכולות התלמידים. למרות שניתן לפרש את הממצאים באורח פסימי לגבי למידה בית ספרית, הרי מצד שני אפשר לראות בהם ״הוכחות קיום״ להבנה ויכולת של יצירת מתמטיקה בקרב תלמידים שמקובל לסווגם כחלשים. הוכחות קיום מעין אלו יוצגו גם בדו״ח זה, כאשר המטרה היא להפיק לקחים לגבי אופני החשיבה המתמטית שיש לטפח ולעודד אצל תלמידים מתקשים, בניסיון לרתום אותם לצורך למידה בית-ספרית מוצלחת. כאן המקום לציין, כי ישנה חשיבות רבה לאופן בו מתייחסים תלמידים לשימוש באסטרטגיות לא פורמליות לצורך מתן תשובות לשאלות במתמטיקה. תלמידים רבים, וגם

מורים לא מעטים, ממעיטים בערכן של אסטרטגיות שאינן נשענות על רוטינות נלמדות כי אם על חישובים מנטליים, ניחוש וטעייה, אומדן, המחשות באמצעות אובייקטים ובאופן כללי על הפעלת שיקולי שכל ישר אשר לאו דווקא ניתנים לכתיבה פורמלית. סוג זה של אסטרטגיות כלול במה שבן-יהודה ושותפותיה (Ben-Yehuda et al., In press) מכנות בשם "שיח מתמטי יומיומי" (colloquial mathematical discourse), לעומת ה- "literate mathematical discourse" שהוא השיח המתמטי הפורמלי. לעמדה הרווחת, על פיה אם לא נעשה שימוש בפרוצדורות פורמליות הרי ש"זאת לא מתמטיקה", עשויות להיות השפעות חמורות על תלמידים שדווקא הדרכים הלא פורמליות עשויות לקדם אותם, כפי שמנסחות זאת בן-יהודה ושותפותיה בסיכום מחקרן:

"לא מוצדקת היא העובדה, שהשיח המתמטי היומיומי הוא בלתי מוערך, לעתים עד כדי הדחתו המוחלטת מתכניות הלימודים. [...] דה-לגיטימציה מסוג זה עשויה לחסום את מעורבותם של תלמידים אשר עבורם אופני התקשורת "פחותי הערך" הללו הם הנגישים ביותר" (שם, תרגום מעמ' 47).

בן-יהודה ושותפותיה ראיינו שתי נערות בנות 17, בעלות רקע של קשיים מרובים במתמטיקה, אשר התבקשו לבצע סדרה של חישובים אריתמטיים (מסוג 86-92 או 123+2345). מעניין לציין כי מבין שתי הנערות שרואיינו, דווקא הנערה שאובחנה על ידי מורתה כבעלת "פוטנציאל" מתמטי נמוך יותר עקב יכולתה הדלה לבצע פרוצדורות פורמליות, התגלתה על ידי החוקרות כמסוגלת לעבור בגמישות מאסטרטגיה מנטלית אחת לאחרת, ובאופן כללי כבעלת סיכוי טוב יותר להיתרם מהתערבות הולמת. הנערה השניה דבקה בעקשנות באסטרטגיות סינטקטיות קשיחות, גם כאשר אלה לא הועילו לה. כדי לסייע לה, אומרות החוקרות, יש ראשית כל להגמיש את ראייתה לגבי מה שנחשב כשיח אריתמטי לגיטימי. בהמשך הדו"ח נבחן דוגמאות של תשובות תלמידים לשאלות מתמטיות, בהינתן להם הלגיטימציה להשתמש גם באסטרטגיות בלתי פורמליות הנשענות על שכל ישר. כמו כן נתייחס לשאלה מה קורה כאשר התלמיד מוכן לעבוד אך ורק באופן לא פורמלי.

3. בכיוון המחקרי השלישי נמצאים מחקרים הדנים בשיטות הוראה המתאימות לאוכלוסיות תלמידים חלשות. נקודת המוצא של רבים מן המחקרים הללו מנוגדת לתיאוריות למידה מסורתיות שהיו מקובלות עד לפני כעשרים וחמש שנים. על פי התיאוריות המסורתיות, הביהביוריסטיות, מודל הלמידה הרצוי הוא "למידה לשליטה" (mastery learning). הדרך להשגת שליטה היא סדרתית וליניארית, כאשר תחילה מוצבים יעדים פשוטים המערבים חשיבה מסדר נמוך, ולאחר מכן מתקדמים בהדרגה אל מטלות מורכבות הדורשות חשיבה מסדר גבוה (אמנם, הפרשנות הביהביוריסטית למונח "חשיבה מסדר גבוה" היא עדיין במסגרת פרוצדורלית - המטלה נחשבת "גבוהה" יותר ככל

שהפרוצדורה שיש להפעיל מסובכת ומורכבת יותר. אנו נשתמש כאן במונח "חשיבה מסדר גבוה" במובן אחר לחלוטין: הכוונה לחשיבה המערבת שיקול דעת. המטלות הן מסדר גבוה יותר ככל שהרמה הקוגניטיבית הדרושה היא גבוהה יותר - ניתוח, הסקה, שיפוט וכדומה). שפרד (Shepard, 1991) מסבירה כי כתוצאה מן המודל הביהביוריסטי, תלמידים חלשים יחוו באופן תמידי הוראה הדורשת מהם חשיבה מסדר נמוך בלבד, מאחר שמוריהם אינם סבורים כי הם בשלים לעבור לשלבים הבאים ברצף הלמידה. אכן, רודנבוש וחובריו (Raudenbush et al., 1993) הצביעו, בהתבסס על מספר מחקרים, על נטייה של מורים להדגיש תהליכי חשיבה גבוהים בכיתות חזקות, בעוד כיתות חלשות יודרכו על ידי אותם מורים בשיטות של "האכלה בכפית". ממצאיהן של זוהר וחובריה (Zohar et al., 2001) מאשרים נטייה זו, המביאה לידי מה שהן מכנות "נבואה המגשימה את עצמה" אשר מרחיבה את הפער בין בעלי ההישגים הגבוהים לבעלי ההישגים הנמוכים. במחקר שנערך בבתי ספר בירושלים (Yair, 1997), נמצא, כי גם כאשר ההוראה מתבצעת בכיתות הטרוגניות, ישנו לעתים קרובות הבדל בין סוג המאמצים המכוונים על ידי המורים כלפי התלמידים החזקים בכיתה, לבין אלה המכוונים כלפי התלמידים החלשים: הראשונים זוכים לדגש על מטרות קוגניטיביות-לימודיות, ואילו אצל האחרונים מודגשות יותר מטרות אפקטיביות- התנהגותיות. ממצא זה מתיישב עם הטענה של פייג' (Page, 1991), כי הציפייה של מורים מתלמידים חזקים היא להתמודד עם חומרי למידה מורכבים ומאתגרים, בעוד תלמידים חלשים מצופים ללמוד מיומנויות יסוד ולהפנים ערכי התנהגות נאותה ומוסר. מכיוון שציפיותיהם של מורים נוטות להשפיע על הישגי התלמידים (Brophy, 1983), הרי שגם בכיתה הטרוגנית צפויה להתרחש התופעה של "נבואה המגשימה את עצמה".

השקפותיהם של מורים לגבי תלמידים חלשים עשויות גם להשפיע על החלטותיהם ליישם קוריקולום מסוים בכיתותיהם, החלטות שיש להן חשיבות קריטית. פיטרסון (Peterson, 1988) מעלה ביקורת כנגד הקוריקולום המסורתי במתמטיקה. על פי פיטרסון, הקוריקולום בנוי כך שיעדים מסדר חשיבה גבוה שמורים לשלבים המתקדמים ברצף ולפיכך רק תלמידים חזקים ובעלי הישגים זוכים להוראה המשלבת רמות חשיבה גבוהות. פיטרסון מייחסת חשיבות רבה להוראת מיומנויות חשיבה גבוהות לכל תלמידי המתמטיקה, ובעיקר דווקא לתלמידים החלשים, אשר יתקשו לרכוש מיומנויות אלה ללא הדרכה. ברם, מורים לא מעטים מחזיקים בדעה כי הוראה המתבססת על חשיבה מסדר גבוה אינה מתאימה לתלמידים חלשים, ועבורם יש לדבוק בשיטה של "העברת ידע". בין הנימוקים לדעה זו כפי שהועלו על ידי מורים במחקרן של זוהר וחובריה נמצאות הטענות הבאות (Zohar et al., 2001, תרגום חופשי מעמוד 478):

"החלשים לא יקלטו זאת"

"תלמידים פחות מוכשרים אינם מסוגלים לחקור בכוחות עצמם, צריך להגיש להם הכל"

"התלמידים הטובים הם אלה שחושבים. החלשים יותר אינם חושבים"

"ישנם תלמידים חלשים שלא יתפסו את זה... הם יהיו ב"אאוט טוטאלי". אבל אם אשתמש בשיטה של העברת ידע תהיה לי יותר שליטה עליהם".

הטענה האחרונה ראויה לתשומת לב. מרי מץ (Metz, 1978) טוענת בספרה כי נטייתם של מורים ללמד כיתות של תלמידים חלשים באמצעות שיטות של העברת ידע רוטינית בקצב איטי, היא למעשה אסטרטגיה לניהול הכיתה באופן שימזער ככל האפשר חיכוכים אפשריים. השיעורים מתנהלים על פי חוזה בלתי כתוב בין המורה והתלמידים, המושתת על עיקרון פשוט: התלמיד אינו מפריע והמורה אינו מכביד בדרישות אינטלקטואליות. מה שמתפתח לעתים קרובות כתוצאה מחוזה זה הוא מה שאנו מכנים בשם "הוראה ולמידה לכאורה": המורה מראה מהן המניפולציות שיש לבצע, התלמידים מעסיקים את עצמם, במקרה הטוב, במילוי הוראותיו של המורה, אך שום דבר משמעותי אינו מתרחש. חזן (Chazan, 1996, 2000) ושותפתו להוראה בכיתת האלגברה בה לימדו תלמידים בעלי הישגים נמוכים, היו מודעים היטב לחוזה זה, שתלמידיהם כבר היו מורגלים בו. הם החליטו, כפי שנראה בסעיף III להלן, לשבור את כללי המשחק הידועים ולהציע שיטת לימוד אחרת. גם מאחורי תכניות הלימודים שנכתבו במכון ויצמן עבור יחידה אחת, שתי יחידות ושלוש יחידות לימוד במתמטיקה (תכנית ש"י), עמד רציונל דומה. מתוך הכרה בצורך בשינוי הרגלי התלמידים החלשים (ומוריהם) במה שקשור להתנהלותם של שיעורי המתמטיקה, נעשה ניסיון לתת מענה לצרכים המיוחדים של תלמידים חלשים. הרכבי, הדס ודרייפוס (Arcavi, Hadas & Dreyfus, 1994) מתארים את הבניה של תכנית הלימודים כפועל יוצא של מודעות למאפיינים של אוכלוסיית התלמידים המתקשים במתמטיקה, אוכלוסייה הנמצאת ב"פריפריה" של כלל לומדי המתמטיקה. התכנית לוקחת בחשבון מאפיינים כגון זיכרון פעיל קצר-טווח, סף תסכול נמוך, קושי בראייה גלובלית של הידע, קושי בהתבטאות בכתב ובעל-פה ועוד. בבסיס התכנית מצויה גישת הוראה הנובעת מהשקפה שניתן לכנותה "מתמטיקה הומנית", ואשר מטרתה לקדם כמה שיותר תלמידים להצלחה בבחינת הבגרות ברמת שלוש יחידות (ראה דו"ח מחקר לגבי תלמידים חלשים במתמטיקה, הרכבי, 1999). גישת ההוראה מבוססת על העקרונות הבאים:

- כל נושא מתמטי ייבנה יחד עם התלמידים כאשר נקודת המוצא היא על פי רוב השכל הישר של התלמידים בצירוף ידע קודם מינימלי במתמטיקה (וזאת ניתן לעשות כמעט בכל נושא מתמטי תיכוני בעזרת "הינדוס דידקטי[2]" מתאים) .

---

[2] didactical engineering, ראה Artigue, 1992.

- יחידות הלימוד מפתחות נושא חדש דרך שאלות, בעיות, דיון ומסקנות תוך שמירה על הקשר למשמעות ולשכל הישר, ותוך שימוש מירבי בכלים בסיסיים הנגישים לכל תלמיד. טיפולים פורמליים ונוסחאות אינם מוקד העיסוק העיקרי, והם מובאים לצורך פיתוח רעיונות ופתרון בעיות ולא כמטרה בפני עצמה. טכניקות אלגבריות או אחרות נעקפות לעתים על ידי טיפוח גישות אינטואיטיביות, נומריות או גרפיות.
- תלמידים אינם נדרשים לזכור נוסחאות בעל פה וליישם אותן, אלא מקבלים עידוד לשחזור תהליכים ולפיתוח דרכים אלטרנטיביות לפתרון. בחומרי הלמידה מטפחים במיוחד אומדן של תשובה ובדיקת הגיוניותה, שימוש במחשבונים (על מנת להוריד מעומס החישובים, גם הפשוטים שבהם), שימוש באמצעים ויזואליים והמחשות.
- בכל נושא יש מגמה מפורשת ליצור קשר בין התכנים השונים ובין הייצוגים השונים שלהם. כמו כן, יש מגמה לקשור בין יחידות שונות על מנת להציג קוהרנטיות ולטפח הבנה.

עקרונות אלה באים לידי ביטוי גם בחומרי הלמידה שפותחו עבור תלמידים מתקשים בחטיבות הביניים (ראה למשל הרציונל המופיע באוגדן למורי המתמטיקה בכיתות ח׳ רמות ג׳, בוהדנה והדס, 2002).

כנקודה אחרונה בסקירת הכיוון המחקרי השלישי, המתמקד בהוראה, נזכיר את נושא שיבוצם של מורים לעבודה עם תלמידים חלשים. נשאלת השאלה, מיהם המורים המלמדים בכיתות מתמטיקה חלשות, מבחינת ידע ומוטיבציה? דו״ח שהוציא המרכז האמריקאי לסטטיסטיקה בחינוך (National Center for Education Statistics, 1996), מדווח כי תלמידים בהקבצות נמוכות במתמטיקה או בכיתות המאוכלסות בתלמידים המוגדרים חלשים, מקבלים לעתים קרובות יותר מורים שתחום התמחותם אינו מתמטיקה. מספר מחקרים מראים כי תלמידים חזקים או כאלה הלומדים בהקבצות גבוהות, זוכים בדרך כלל להוראה שהיא לא רק רבה יותר מבחינת כמות השעות כי אם גם טובה יותר מבחינת האיכות (ראה סקירה אצל Yair, 1997). נושא זה לא נחקר באופן מעמיק במסגרת הדו״ח הנוכחי, אך בסיכום הדו״ח נתייחס בקצרה גם לנקודה זו.

4. בכיוון המחקרי הרביעי מצויים מחקרים שאפשר לאגדם תחת הכותרת ״תלמידים חלשים וטכנולוגיה״. בחמש עשרה השנים האחרונות פורסמו מספר מחקרים בנושא שיפור ההבנה המתמטית וההישגים של תלמידים מרמות שונות, על ידי הוראה ותרגול באמצעות מחשבים. סקירה של הספרות הקיימת בנושא מעלה, כי החוקרים רחוקים מקונצנזוס באשר לשאלה מי ״מרוויח״ משימוש במחשבים בכיתת המתמטיקה. מברך (Mevarech, 1993) מצביעה על מחקרים על פיהם תלמידים חלשים מתקדמים יותר כאשר הם נעזרים בכלים טכנולוגיים, לצד מחקרים מהם עולה כי הוראה בעזרת מחשבים רק מעמיקה את הפער בין התלמידים הטובים לתלמידים החלשים (למשל Hativa, 1988). בהמשך הדו״ח הנוכחי לא

נתייחס להיבט הטכנולוגי, אולם בסקירה זו נסכם ממצאים של ארבעה מחקרים בנושא זה, המשקפים רעיונות אשר עשויים לעורר מחשבה גם בכיוונים העולים בקנה אחד עם היבטים אחרים של למידה אצל תלמידים חלשים, המודגשים בדו"ח.

סתרלנד (Sutherland, 1993) ערכה ניסוי בכיתה של תלמידי חטיבות ביניים (גילאי 14-15) במכסיקו. התלמידים באו מרקע של קשיים וכישלונות במתמטיקה והפגינו ניכור כלפי מתמטיקה וכלפי בית הספר בכלל. בעיות משמעת בכיתה זו היו שכיחות. במבחן אלגברה וראיונות שנערכו לפני הניסוי לעשרה תלמידים בהם התמקד המחקר, נמצא כי רובם לא היו מסוגלים לענות על אף שאלה, ולא ראו כל משמעות בסמלים אלגבריים (אחת התלמידות, ג'ו שמה, טענה למשל כי L יהיה תמיד מספר גדול מ- A, מפני שהוא מופיע אחריו בסדר האלפבית). במסגרת הניסוי עבדה סתרלנד עם התלמידים על פתרון בעיות באמצעות גיליון אלקטרוני. בתחילה הפגינו התלמידים חוסר ביטחון ניכר, קראו לעזרה לעתים תכופות ודרשו מהמורות לספק להם תשובות. בהתאם לבעיות שהתעוררו, ערכה סתרלנד שינוי במשימות, אך הותירה את האחריות לפתרון בידי התלמידים. לאחר כחמישה שיעורים מול המחשב, מדווחת סתרלנד, חל שינוי קיצוני בהתנהגות התלמידים. הם התרכזו במשימות, קראו פחות לעזרה, ואף התחילו לגלות עניין והנאה. במבחן שנערך בתום הניסוי נמצא שיפור ניכר ביכולתם לעבוד עם סמלים. סתרלנד טוענת כי העבודה עם מחשב סייעה לתלמידים מן הסיבה הבאה: בשיעור אלגברה סטנדרטי, היא אומרת, נמצאת הסמכות להחליט מה נכון ומה לא נכון בידי המורה. תלמידים חלשים הנאלצים לנהל דיאלוג כלשהו עם המורה חושפים למעשה את מה שנתפס בעיניהם כבורות. המחשב מאפשר משוב הגלוי רק לעיני התלמיד המשתמש. יתרה מזאת, המשוב המתקבל מעבודה עם גיליון אלקטרוני אינו בצורת נכון/לא נכון; התלמידים מקבלים נתונים מסוימים ומשערים מה צריכה להיות התבנית שתתאים להם, הם רושמים את התבנית, מציבים מספרים ובודקים האם התקבלה התוצאה שציפו לה. במקרה שלא, יש להם אפשרות לתקן ולבדוק שוב את תוצאות התיקון. כך מתפתחת תחושה של "sense making". תחושה זו של בניית משמעות היא לעתים קרובות חדשה עבור תלמידים מתקשים, המורגלים בתרגול מסדר חשיבה נמוך שאינו מציב אתגרים ואינו מאפשר לחוש חוויה של הבנה. הדבר ניכר היטב בדבריה של ג'ו, אותה תלמידה שהוזכרה קודם, בראיון שערכה עמה סתרלנד בתום הניסוי (שם, תרגום מעמ' 45):

> ג'ו: שאלת שאלות בצורה שונה, כך שחייבים לחשוב על מה שעושים [...] העבודה עם מחשב מכריחה אותך לחשוב.
>
> מראיינת: איך את יודעת שאת חושבת?
>
> ג'ו: כי המוח שלך כואב... לא יודעת... את חייבת לחשוב על זה לפני שאת מכניסה את זה למחשב, או שסתם תבלגני את כל הגיליון.

סוהיר נאסר (2000) חקרה את אופי ומידת התרומה של שימוש במחשב במהלך למידת אלגברה בגישה פונקציונאלית, אצל שלושה זוגות של תלמידים בעלי הישגים נמוכים בחטיבת הביניים. נאסר מצאה כי התלמידים, שהתמודדו עם בעיות מילוליות סטנדרטיות ולא סטנדרטיות באלגברה, נעזרו במחשב כאלטרנטיבה לפרוצדורות פתרון סימבוליות. בעזרת המחשב הם שילבו בפתרונותיהם מספר ייצוגים (נומרי, טבלאי, גרפי) בו זמנית, דבר שאצל תלמידים חזקים שעבודתם נחקרה במקביל, התרחש גם ללא סיוע המחשב. השימוש במחשב מנע את התלמידים החלשים יותר מ"היתקעות" בשיטת עבודה בלעדית, אִפשר להם עקיפה של מניפולציות סימבוליות בעלות "פוטנציאל תסכול" רב, היווה גורם מבקר על טעויות ובאופן כללי דחף לבדיקה של מודלים מתמטיים תוך הפעלת שיקולים של שכל ישר.

מקרובי ושותפיו (McRobbie et al., 2000) בדקו את השפעותיו של תרגול באמצעות מחשב על התקדמותם של תלמידים חלשים בכיתות ה'-ט'. מבין ארבע עד חמש שעות לימוד שבועיות במתמטיקה, הוקדשה במשך כארבעה חודשים שעה אחת לתרגול דיפרנציאלי של מיומנויות אריתמטיות (כפל, חילוק, שברים, שטחים) בדפי עבודה ממוחשבים, בתוכנת ILS (Integrated Learning System). החוקרים השוו בין דו"חות ההתקדמות שסיפקה התוכנה לגבי כל תלמיד, לבין ההתקדמות כפי שנמדדה במבחני ההישגים הסטנדרטיים של קווינסלנד, אוסטרליה. כמו כן בדקו את עמדותיהם של התלמידים ומוריהם כלפי השימוש בתוכנה. מתוך סקירת הממצאים עולה, כי לא ניתן להגיע למסקנה חד-משמעית בדבר תמיכה בשימוש בתוכנה או דחייתה. התברר, כי למרות שכמעט כל התלמידים התקדמו בדרגת השליטה במשימות כפי שדווחה על ידי התוכנה, הרי שבמבחנים הסטנדרטיים הושגה התקדמות פחותה מן הממוצע הצפוי תוך מחצית שנת לימודים. עם זאת, רוב המורים נטו לאמץ את התוכנה מסיבות אַפקטיביות: הם טענו כי השימוש בתוכנה הגביר את הביטחון של תלמידיהם, העלה את רמת ההשתתפות בדיונים כיתתיים ואת רמת המעורבות בתהליך הלמידה, וכמו כן שיפר את ההתנהגות בכיתה באופן כללי. ממצא זה עולה בקנה אחד עם ממצאי השאלון לתלמידים, שכן כשני שליש מן התלמידים ציינו כי הם אהבו את התוכנה וכי הם הרגישו שהיא מסייעת להם ללמוד.

מייס (Mayes, 1992) ערך במשך מספר חודשים ניסוי שבו למדו תלמידי תיכון מרמות שונות אסטרטגיות של פתרון בעיות בסביבה ממוחשבת. בניסוי זה הטכנולוגיה נמצאה בשליטת המורים, שהקרינו על גבי מסך גדול את המתרחש על מסך המחשב, כאשר המטרה היתה לספק אפיזודות המהוות הזדמנות לחקר. מייס מצא כי התלמידים החלשים בניסוי לא הרוויחו מסביבת למידה זו, וביצועיהם היו טובים יותר דווקא בקבוצת הביקורת שלמדה אסטרטגיות פתרון שלא באמצעות מחשב. ממצא זה קיבל תמיכה במחקרם של ירדיק ושותפיו (Yardic et al., 1996), אם כי במחקר זה גיל המשתתפים היה גבוה יותר (מבוגרים

בני 18-30). לאור ממצאיו מציע מייס, כי תלמידים חלשים זקוקים לעבודה של "אחד על אחד" מול המחשב.

מן המחקרים הנזכרים לעיל אפשר "לזקק" מרכיבים העשויים לסייע להתקדמותם של תלמידים חלשים, שהם מעבר לכלים טכנולוגיים אלה או אחרים; משוב תומך ואינדיווידואלי, השארת מידה של אחריות בידי התלמידים, מתן משימות הדורשות חשיבה. מרכיבים אלה יחזרו ויישנו במהלך הדו"ח.

III. ללמוד ללמד אחרת: ספרו של דניאל חזן והרלוונטיות שלו להוראת תלמידי רמות ג'.

חזן הוא מורה וחוקר באוניברסיטה של מדינת מישיגן (Michigan State University) בארה"ב. במהלך מספר שנים בהן לימד בבתי ספר שונים, ובפרט בכיתות אלגברה של תלמידי תיכון בעלי הישגים נמוכים, גיבש גישת הוראה המתייחסת בין היתר למרכיבים סוציולוגיים כיתתיים ולדפוסי חשיבה והתנהגות של תלמידים המוגדרים "חלשים".

האפיונים שמצא חזן אצל תלמידים חלשים באלגברה הם:

1. קושי בקריאה וכתיבה.
2. קושי בהתבטאות בעל פה.
3. קושי באבחון ההבנה של עצמם: התלמידים נוטים להערכת יתר (over estimation) או לתת-הערכה (under estimation) של הידע שלהם.
4. קושי ב"היזכרות" כיצד להשתמש נכון בסמלים מופשטים שכבר מוכרים להם.
5. נטייה לחוסר אקטיביות בדיון כיתתי.
6. נטייה לא לרשום בכיתה ולהזניח את שיעורי הבית.

למרות זאת, טוען חזן, רבים מבין התלמידים הללו בהחלט מסוגלים להפגין תובנות בעלות ערך. לדעתו, כפי שכבר הובעה במאמר קודם הנושא את השם ?Algebra for All Students (Chazan, 1996), הקוריקולום באלגברה פגום באופן בסיסי וזקוק לשינוי מהותי. הדרך בה מלמדים אלגברה הופכת את הנושא לקשה ובלתי אפשרי לתלמידים רבים. שינוי בשיטת הלימוד עשוי להביא להכרה בנקודות החוזק של תלמידים חלשים.

חזן ושותפתו ביקשו לפתח קורס אלגברה שתתבצע בו פעילות אינטלקטואלית בעלת משמעות. לשם כך היה עליהם, כאמור, לשבור את החוזה הבלתי כתוב עם תלמידיהם וליזום פעילות מתמטית בלתי פסיבית של התלמידים. בהתאם למודל של למפרט (Lampert, 1990), התומכת בהוראת חשיבה מסדר גבוה לכלל התלמידים, בנו את השיעורים סביב מטלות קצרות הנדונות בקבוצות קטנות ולאחר מכן מדווחות לכלל הכיתה. השאיפה היתה להביא תלמידים לבטא את מחשבותיהם כמה שיותר במהלך עבודתם על הבעיות.

אך לא די היה בכך; המעורבות בשיעור לא תמיד היתה פועל יוצא של טיב המטלות. חזן ושותפתו הבחינו בכך שישנה חשיבות לגורמים חברתיים בכיתה, והחליטו לערוך מיני-מחקר במסגרתו נציגים מתלמידי הכיתה יחקרו ויתארו תופעות חברתיות בכיתה המשפיעות על איכות הלמידה. כתוצאה מהמחקר התברר שבכיתה רוחשות ארבע קבוצות חברתיות, שונות מבחינת תחומי העניין והיחס ללימודים (למשל הקבוצה שכונתה smokers כללה קבוצת חברים שנהגו להסתובב יחד בהפסקות ולעשן בצוותא). טענה מרכזית של חזן היא כי על מנת להיטיב ללמד יש להכיר את התלמידים מבחינה חברתית וכמו כן להכיר בהשלכות הלימודיות שיש לקיומן של תת קבוצות בכיתה. לדוגמא, חלוקה לקבוצות בכיתה לא תעבוד במקרים מסוימים של צירוף תלמידים מקבוצות חברתיות שונות. מצד שני לעתים מתרחשת למידה דווקא בין תלמידים שבדרך כלל אינם מתרועעים חברתית. המורה המקצועי שאינו מיטיב להכיר את החלוקות החברתיות הללו עשוי להחמיץ הזדמנויות לאופטימיזציה של הלמידה בקבוצות.

אספקט סוציולוגי נוסף שחזן עומד עליו נוגע לנושא של מעורבות ומוטיבציה בקרב תלמידים חלשים. חזן מקשר בין התנהגות של תלמידים ובין מה שהוא מכנה בשם "המסלול האישי" (personal trajectory) שהתלמיד מייעד לעצמו בעתידו כבוגר. חוסר מעורבות של תלמיד בקורס מסוים מצביע על חוסר התאמה בין תחושת המסלול שלו ובין תוכן הקורס. אם להתמקד ספציפית בשיעורי מתמטיקה, חזן סבור כי הטיעונים שמעלים מורים רבים בעד הצורך ללמוד מתמטיקה מתבססים על עתיד שכלל אינו חזוי על ידי התלמידים החלשים עבור עצמם, ולכן טיעונים אלה אינם אפקטיביים. לומר לתלמיד חלש שמתמטיקה תפתח בפניו דלתות הוא מהלך די אכזרי לדעת חזן - רוב התלמידים מודעים לאפשרויות המקצועיות המוגבלות שלהם, עם או בלי הצלחה באלגברה. מעבר לכך, טיעון זה רומז לעבר האוניברסיטאות, מוסד שמרבית התלמידים הללו אינו שוקל כלל. (דברים ברוח דומה מופיעים גם בספרו של מרטין (Martin, 2000) על לימודי מתמטיקה בקרב הקהילה האפרו- אמריקנית. כפי שניסח זאת אחד מן המרואיינים - "If you can't have it, why struggle for it" (שם, עמ' 175)). לומר לתלמידים שהאלגברה היא שימושית הוא טיעון הסותר את ניסיון חייהם ואת מה שהם רואים אצל הוריהם; סביר להניח שמעולם לא ראו מישהו בסביבתם פותר משוואה או מפשט ביטוי.

גם לומר שהאלגברה מרחיבת אופקים הוא טיעון גרוע, משום שקשה לראות במה אלגברה "פותחת את הראש" כפי שאולי עושים המקצועות ההומניסטיים.

בנוסף, ההבדל בין המסלול שעבר המורה ובין המסלול של התלמידים יוצר חיכוך רב. מורים רבים למתמטיקה באו מרקע של הצלחה במתמטיקה ואין להם מושג מה פירושו של דבר להיות בעל הישגים נמוכים במתמטיקה. בדרך כלל, גישה ללימודים גם מקושרת מאד לרקע סוציולוגי ולכן תלמידים מרקע סוציו-אקונומי נמוך אינם יכולים על פי רוב להזדהות עם מורה מן המעמד הבינוני.

גם היחס לשיעורי הבית הוא חלק מפרספקטיבה חברתית. תלמידים חלשים נוטים להתייחס ליום הלימודים כמו אל יום עבודה של הצווארון הכחול; יש להשלים את השעות הדרושות וללכת הביתה. לעומת זאת, שיעורי הבית נתפסים כהארכה ללא תמורה של שעות העבודה, כמקובל במקצועות הצווארון הלבן (white color unpaid overtime) ולא כשעות נוספות בתשלום כמקובל במקצועות הצווארון הכחול (blue color overtime), ואם כך אין כל סיבה להכין אותם.

בעיה נוספת שיש לה קשר לאספקט החברתי היא הנושא של בעיות מתמטיות הלקוחות לכאורה מעולמם של התלמידים (real world problems). חזן מסביר שבעבודה עם תלמידים חלשים יש להכיר בכך שהעולם שאנו מייחסים להם אינו בהכרח העולם שלהם. כמו כן, לקבוצות החברתיות השונות בכיתה יש עולמות שונים. לדוגמא, דיון באחוז המס על סיגריות יעניין את קבוצת ה- smokers אך לא קבוצה אחרת המכונה בשם preppies. לעומת זאת, מטלה סביב פעילות כמו תכנון הצגה לבית הספר לא תעניין את ה- smokers.

כתוצאה ממכלול ההיבטים הסוציולוגיים שהועלו, ובהתחשב במטרה שהוצבה, מגיע חזן למסקנה הבאה:

האחריות להפיכת שיעורי המתמטיקה למעניינים צריכה להתחלק עם התלמידים במקום שהמורה ישא בה לבדו. על המורה לנסות ליצור מצב בו התלמידים יספרו איזו אלגברה יש בחייהם, יותר מאשר להמציא בעיות שאולי יהיו רלוונטיות עבורם. המורה צריך לסייע לתלמידים לראות אלגברה סביבם.

השאלה המתבקשת היא, כיצד מבצעים זאת הלכה למעשה? הדרך שניסה חזן (ואפשר כמובן להציע דרכים אלטרנטיביות) היא הוראת האלגברה בגישה פונקציונאלית. לעניין זה פונקציה היא יחס בין שתי כמויות כאשר כמות הפלט תלויה חד משמעית בכמות הקלט. את הכמויות המשמשות נושא לדיון מביאים התלמידים מתוך ניסיונם היומיומי. לטענת חזן הוראת האלגברה בגישה זו מחברת את התלמידים לעולם סביבם. הוא מדגים טענה זו בעזרת פעילויות שונות שכלשונו גרמו לתלמידים "לשאת את משא הרלוונטיות", כלומר למצוא קונטקסט שבו המתמטיקה תהיה רלוונטית. בין הפעילויות: דיון בכמויות שצמחו מתוך תחביבים של תלמידי הכיתה; כתיבת "סיפורי כמויות" כאשר כל זוג מחליף בינו לבין עצמו את הסיפורים וכל אחד צריך למצוא ייצוג גרפי לסיפור של חברו; ראיונות של תלמידים עם אנשי עסקים מקומיים במטרה למצוא כללי אצבע חישוביים בהם הללו משתמשים בעבודתם (פעילות זאת כונתה על ידי אחד התלמידים בכיתה בשם "מסע ציד אחרי מתמטיקה בעבודה", התלמידים ראיינו נגרים, מניחי צינורות, ועוד). חזן מתאר בספרו מקרים של התקדמות בהבנה. התלמידים לומדים לתת משמעות לבעיות ואפילו לבקר מודלים מתמטיים שאינם הגיוניים להם.

ברם, השינוי הקוריקולרי אינו היחיד המתבקש. כאמור, פעלו חזן ושותפתו להוראה על פי המודל של למפרט, המתבסס על עבודה בקבוצות קטנות ודיון משותף. הניסיון לסגל

לתלמידים צורת עבודה זו, השונה כל כך משיתוף הפעולה הסביל (במקרה הטוב) עם הרצאתו הפרונטלית של המורה כפי שהתרגלו אליו בעבר, לא היה פשוט כלל ועיקר. חזן מנסה לענות בספרו על השאלה העקרונית הבאה: מדוע שיעור מתמטיקה הוא עמיד כל כך בפני גל השינוי של "הוראה שמרכזה התלמיד" (student-centered instruction) ?

באופן כללי תשובתו המוצעת של חזן היא, כי האמונות הרווחות בדבר טיבו של הידע המתמטי הן מושרשות עד כדי כך שאינן מאפשרות שינוי. שלוש האמונות העיקריות שהוא מונה הן:

1. כל משפט מתמטי מן המתמטיקה הבית ספרית יכול להישפט חד משמעית כנכון או לא נכון.
2. תפקידו של המורה להפעיל וליישם את השיפוט הזה.
3. ניתן להשתמש ביעילות בשיפוטים הללו על מנת לקבוע את יכולתו המתמטית של תלמיד.

בבית הספר מושם דגש רב על נכונות (correctness), בלי להקדיש תשומת לב יתרה לעובדה שנכונות תלויה בהנחות יסוד.

על פי דגש זה, תפקידן של הבעיות הנפתרות על ידי התלמידים הוא לוודא שהחומר הופנם. תשובות לא נכונות מעידות על כך שהחומר "לא נקלט היטב" ויש לחזור עליו. ההנחה המקובלת היא כי "יש תלמידים שנוטים לאי נכונות יותר מאחרים, ככל הנראה הם בעלי יכולת נמוכה במתמטיקה". תלמידים שאינם מייצרים תשובות נכונות, ולא משנה מאיזו סיבה, אינם מצליחים במתמטיקה ונחשבים לבעלי יכולת נמוכה. הם אינם רואים או חשים בבהירות את מה שנראה ברור בעיני בעלי היכולת. הם אינם משיגים הישגים גבוהים במבחנים. מכיוון שהקוריקולום נחשב כבנוי בקושי מדורג, הרי ככל שהתלמיד מחזיק מעמד בלימודי המתמטיקה כך הוא נחשב לבעל יכולת. כתוצאה ממצב זה, נוצרת הסכמה שבשתיקה בדבר הצמדת "תג יכולת" לכל תלמיד. תלמיד שקיבל על עצמו את תג היכולת הנמוכה, מניח מראש שכל מטלה מתמטית שתוטל עליו תהיה קשה מדי. עבור התלמיד החלש, כל מורה הוא עוד אחד בשרשרת מורים ששפטו אותו בעבר כחלש, והוא התרגל לכך. אין לו עניין לשתף את המורה בחשיבה שלו. כמו כן, אין הוא חש כל טעם להאזין לחבריו, משום שגם הם נשפטו כחלשים, ומה כבר אפשר ללמוד מהם? מטרתו של חזן היתה אפוא להיאבק בתדמית זו ולהדגיש את החוזק המתמטי שהתלמידים מביאים לכיתה, במיוחד ככל שמדובר בשימוש הגיוני במתמטיקה בקונטקסט מציאותי. שיטתה של למפרט, שהיא למעשה הצגת בעיה <u>לפני</u> לימוד האלגוריתם, כבסיס לחקירה, גורמת להקטנת המימד של נכון / לא נכון. הדגש לתלמידים הוא שתשובות מוטעות משמשות "דלק" לדיון וחיוניות לפיתוח הבנה, כך שמתן תשובה מוטעית או לא מדויקת הוא חלק אינטגרלי מתהליך הלמידה, כפי שכבר הדגישו סמית' ושותפיו (Smith, diSessa & Roschelle, 1993) שהוזכרו

בתחילת סקירתנו. חשוב לציין כי בניגוד ל"אופנות" מסוימות, אין כאן הכוונה להשאיר תשובות מוטעות ולא נכונות תלויות באוויר, רק בגלל שהן נוצרו על ידי התלמידים. הכוונה היא להתבסס עליהן כמקור של ידע לגיטימי אותו יש לעדן תוך בדיקת תחומי היישום הנכונים שלו. במאמרם של סולומון ונמירובסקי (Solomon & Nemirovsky, In press) מודגמת היטב האפשרות לפתח בכיתה דיון מרתק סביב תשובות שונות של תלמידים לשאלה בסדרות, שלכאורה יש לה תשובה נכונה אחת בלבד. במהלך הדיון, מספר המורה שניהל דיון זה, התברר לו כי יש הגיון רב גם מאחורי תשובות אלטרנטיביות שהציעו תלמידים, תשובות אשר בתחילה נראו לו (אם כי לא אמר זאת לתלמידים) שגויות בתכלית. נציין כי לדעתנו, התייחסות המורים לתשובותיהם המוטעות של תלמידיהם היא גורם רב חשיבות, גם במקרה שמקור השגיאה אינו בהגיון אלטרנטיבי אלא בהרגל התנהגותי. אחת ההתנהגויות האופייניות לתלמידים חלשים, אשר כבר עמדנו עליה בדו"ח הקודם (קרסנטי והרכבי, 2001) היא מתן תשובה סתמית, הנזרקת ספונטנית וללא כל מחשבה. יתכן שתופעה זו מקורה לאו דווקא בכך שהחשיבה על התשובה היא בלתי אפשרית, אלא משום שכאמור התלמיד שהודבקה לו תווית של "חלש" אינו רואה טעם להשקיע מחשבה בתשובתו; המורה ממילא יתקן אותו וייקח אחריות על הנכונות, כך שההשקעה אינה משתלמת. מורה המחזיר את האחריות על התשובה לידי התלמיד יכול לשבור את הדפוס הזה וגם על כך נעמוד בהמשך.

לסיכום הרקע התיאורטי: המחקרים הקיימים כיום בנושא תלמידים חלשים במתמטיקה מנסים לקשור בין הצלחה או כישלון במתמטיקה ובין גורמים חברתיים, סוגים שונים של שיח מתמטי ומידת הלגיטימציה הניתנת להם במערכת הבית ספרית, השקפות, אמונות והרגלים של מורים ותלמידים, והנחות היסוד העומדות בבסיסן של שיטות הוראה שונות. חלק מן המחקרים שסקרנו מעוגנים בתרבות המוצא של האוכלוסיות שנחקרו (ארה"ב, בריטניה, דרום אמריקה), ועל כן כל השלכה מתוכם על תלמידים חלשים בישראל טעונה בדיקה ושיקול דעת. על פי תפיסתנו, ישנם אלמנטים רבים במחקר העולמי אשר רלוונטיים גם לגבי תלמידי הקבצות נמוכות בישראל. האפיונים שמצא חזן, למשל, אצל תלמידים חלשים, בוודאי מוכרים למורים המלמדים בהקבצות אלה. גם האבחנות הסוציולוגיות של חזן ואחרים כפי שהוצגו לעיל, נראות לנו ראויות לתשומת לב - אם כי יש לזכור כי הדגם הישראלי של ניתוב תלמידים שונה במובנים רבים מן הדגם האמריקאי ודבר זה יוצר הבדלים ניכרים גם בהיבטים החברתיים שיש למסלולי לימוד שונים. לעומת זאת, הרעיונות המתייחסים לאמונות והרגלים במעגל ההוראה והלמידה עשויים לדעתנו להסביר במידה רבה תופעות המתרחשות בכיתות ישראליות. כמו כן, ראוי לתת את הדעת על הדגשים המוצעים בשיטת ההוראה עליה מדבר חזן (לאו דווקא בהתייחס לתכנים המתמטיים שלה), ועל ההמלצות הכלליות העולות מתוך המחקרים שנסקרו בהקשר לשימוש בטכנולוגיה

לקידום תלמידים חלשים. דגשים והמלצות אלה חופפים במידה ניכרת לאלה של תוכניות הלימודים המקומיות שהזכרנו.

בחלקים הבאים של דו"ח זה ננסה לעגן את הרעיונות העולים מתוך סקירת הספרות בתוך קונטקסט ישראלי. נציג ממצאים שבאמצעותם נעמוד על אפיונים של תלמידים חלשים, בעיקר תלמידי רמות ג' בחטיבת הביניים, וננסה להצביע על אפשרויות לפעול בכיתות ברוח הדברים שהועלו בסקירה זו.

2. איסוף הנתונים.

הנתונים בהם נעשה שימוש בדו"ח זה נאספו מתוך הפעילויות הבאות:

1. **ביקורים בכיתות.** צוותים ממכון ויצמן ביקרו בכיתות שתיאוריהן מופיעים להלן (כארבעה ביקורים בממוצע בכל כיתה).

I. כיתה ח' ברמה ג' בחטיבת ביניים אזורית בפרוזדור ירושלים.

II. כיתה ח' ברמה ג' בחטיבת ביניים עירונית ברחובות.

III. כיתה ט' ברמות ב'-ג' (הקבצה מעורבת) בתיכון אזורי הממוקם בקיבוץ במרכז הארץ.

IV. כיתה ט' ברמה ג' בתיכון עירוני מקיף ברחובות.

V. כיתה ט' ברמה ג' בתיכון מקצועי ברחובות.

VI. כיתה י' מב"ר בתיכון עירוני מקיף בראשון לציון.

אופני התיעוד היו -

- צפייה ללא התערבות במהלכו של שיעור שלם ורישום או צילום במצלמת וידיאו של המתרחש בו. (כיתות V,II).
- ישיבה בסמוך לתלמיד או תלמידה ומעקב אחר עבודתם, בדרך כלל תוך הפניית שאלות הקשורות במשימה שעליהם לבצע. (כיתות V,IV,III,I).

2. **ראיונות אישיים.** הראיונות התקיימו עם תלמידים שנבחרו מכיתות V,II,I, מחוץ למסגרת השיעור. הראיונות הוקלטו ולאחר מכן תומללו.

הממצאים המופיעים בארבעת הפרקים הבאים של הדו"ח מתבססים על הנתונים הללו, לאחר תהליך של סינון ובחירה. תהליך זה התבסס על שני קריטריונים מקובלים במחקר איכותני. הקריטריון הראשון הוא קריטריון הייצוגיות (Miles & Huberman, 1984), על פיו יש לבצע בחירות של מקרים שיאפשרו "לכסות" מספר רב ככל האפשר של פרמטרים רלוונטיים. במילים אחרות, בחרנו להביא קטעי ראיונות וסיטואציות כיתתיות מהן ניתן למצות כמה שיותר סוגיות לדיון. בסינון על פי קריטריון זה לקחנו בחשבון גם את אלמנט החזרה, כלומר ניסינו להבטיח ייצוג הולם לתופעות שחזרו על עצמן הן בתצפיות ובראיונות והן בעדויות של מורים ועמיתים שהשתתפו בקבוצת הדיון שקיימנו בנושא תלמידים חלשים במתמטיקה. הקריטריון השני הוא פוטנציאל הלמידה של המקרים (Stake, 1994). על פי קריטריון זה יש לבחור במקרים המאפשרים לקורא ללמוד מהם דבר מה משמעותי. בהתאם לכך הסתמכה הבחירה גם על הרצון להדגים תופעות שנראו לנו מעניינות וחשובות, אף אם נצפו פעם אחת בלבד.

נציין עוד, כי במקרים בהם נבחרו קטעים מתוך ראיונות שהובאו בשלמותם במסגרת הדו"חות הקודמים, אנו מפנים את הקוראים למקומות המתאימים בדו"חות אלה.

3. ניתוח ראיונות אינדיווידואליים.

כמוסבר במבוא, ההתייחסות לאופני חשיבה של תלמידים כפי שנחשפו במהלך ראיונות אישיים, נמצאת במוקד הדו"ח הנוכחי. בסעיף זה נביא ניתוחים של קטעי ראיונות שנערכו עם תלמידים חלשים בכיתות ח'-ט', הלומדים בהקבצות נמוכות במתמטיקה. המושגים המתמטיים הנדונים בראיונות הם אלה שנלמדו בכיתותיהם של התלמידים בעת בה נערך הראיון. כל ניתוח של מקרה מאיר נקודות עניין שונות, אשר יחד מצטרפות לתמונה המציגה את יכולות התלמידים מחד גיסא, ומקורות הקושי שלהם מאידך גיסא. במקומות המתאימים מתקשר הניתוח לסקירה הספרותית והתיאוריות המוצגות בה. כמו כן לאחר כל מקרה נדונות ההשתמעויות הכלליות שלו, הן התיאורטיות והן אלה הקשורות ליישומים בהוראה.

3.1. קטעי ראיון עם דן.

דן הוא תלמיד כיתה ט' הלומד בקבוצת מתמטיקה מעורבת של רמות ב' וג', בבית ספר אזורי מקיף גדול. המורה העריכה אותו כתלמיד גבולי בין שתי הרמות הללו. ציוניו ממוצעים יחסית לכיתה. בעת הראיון עם דן עסקה כיתתו בנושא ייצוגים שונים של פונקציות (טבלה-גרף-תבנית) והמעברים ביניהם. בראיון ביקשנו לדעת, בין היתר, כיצד יתמודד דן עם קריאת גרפים אותם לא ראה קודם לכן.

הראיון עם דן כלל שני חלקים. בחלק הראשון הוצגו לפני דן שני תרשימים שנלקחו מאתר אינטרנט כלכלי. דן נשאל שאלות שונות המבקשות להפיק מידע מתוך התרשימים. בחלק השני של הראיון התבקש דן לעבוד על הפעילות "1 ס"מ במפה = 20 ק"מ במציאות" מתוך הספר בנושא פונקציות מסדרת "הבה נלמד מתמטיקה" לרמה ג', שנכתב במכון ויצמן.

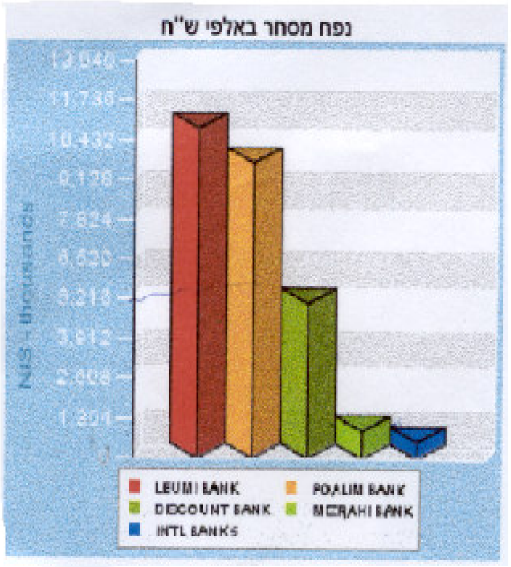
להלן נציג מספר קטעים מתוך הראיון[3], כאשר ניתוח הקטעים מדגיש את הנקודות הבאות:

- יכולת חשיבה על סיטואציה שלא נלמדה בכיתה, תוך ניצול ידע לא פורמלי חוץ-כיתתי.
- יכולת רפלקטיבית/מטה-קוגניטיבית.
- פער רב בין האפשרות להפעיל שכל ישר ובין חוסר האפשרות להשתמש בידע אריתמטי, בשל חסרים בולטים בידע.
- "פיצוי" על החסרים האריתמטיים באמצעות מהלכי חשיבה אלטרנטיביים.

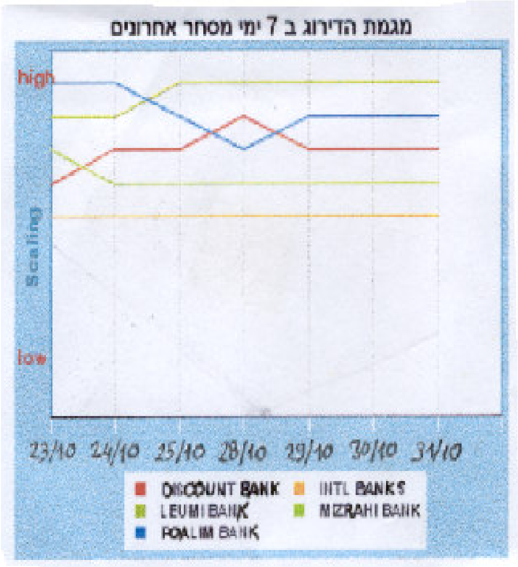
---

[3] הראיון המלא מופיע בדו"ח ביניים קודם (קרסנטי והרכבי, 2001, עמ' 34).

קטע מספר 1: דן מפענח תרשימים המתארים נפח מסחר של בנקים בישראל. לפני דן הוצגו, כאמור, שני תרשימים מתוך אתר אינטרנט כלכלי. התרשים הראשון מתאר בגרף עמודות את נפח המסחר היומי של חמשת הבנקים הגדולים בישראל ביום שקדם לראיון. התרשים השני מתאר בגרף את נפח המסחר של אותם בנקים על פני התקופה של שבוע המסחר האחרון (ראה תרשים 1 ותרשים 2 בעמוד הבא). בקטע הראיון שלפנינו דן מתבקש להתייחס לתרשים 2, לאחר שבשלב מוקדם יותר ניתח את תרשים 1.



תרשים 1



תרשים 2

[מ. = מראיינת].

מ.: [בהתייחס לציר האופקי בתרשים 2] כלומר מה מתואר בציר הזה?

דן: תאריכים שסחרו בהם.

מ.: יופי, מצוין. ימי המסחר. מה- 23 עד ה- 31, בערך כמה זמן זה? כמה זמן זה מכסה, בערך, התקופה הזו?

דן: חודש.

מ.: חודש, מה- 23.10 עד ה- 31.10?

דן: בערך. פחות. זה... אה... בדיוק את רוצה?

מ.: כמה מדויק שאתה יכול.

דן: ש.. שבוע.

מ.: פחות או יותר שבוע. אוקיי. עכשיו מה יש כאן, [בציר האנכי]? כאן הם אומרים מה נפח המסחר. אתה רואה שכתוב כאן low ו- high. מה זה יכול להגיד?

דן: נמוך או גבוה.

מ.: כן. אם רמת המסחר היתה גבוהה כמו כאן [מראה על הבנק הגבוה ביותר בתרשים 1] או נמוכה כמו כאן [העמודה הנמוכה ביותר בתרשים 1]. [...]. מה הם בעצם רוצים להגיד לנו כאן?

דן: את העליות והמורדות שלהם, כאילו, פה [בתרשים הראשון] הם לא יכולים, כי זה רק כמה שזה עולה, אין אה... ופה זה עולה ויורד כל הזמן.

מ.: מה זאת אומרת פה, בגרף הראשון, הם לא יכולים?

דן: כאילו, הם לא יכולים לעשות את זה שזה עולה ופתאום שזה יורד.

מ.: למה לא?

דן: כי זה בעמודות. אי אפשר לעשות את העמודה עולה ויורדת. צריך לעשות גרף חדש כל כמה זמן [...].

מ.: כן, אז למה כאן הם יכולים וכאן לא?

דן: כי כאן זה בימים.

מ.: וכאן?

דן: זה באותו יום.

מ.: אה, אוקיי, עכשיו הבנתי. אז מה נותן לנו הגרף הזה שפה אין?

דן: את ה... עליות והמורדות של המסחר בימים. ו... באיזה תאריכים. בערך כמה זה יוצא, אם זה נשאר בערך אותו דבר או ירד או עלה.

מ.: יופי. אתה יכול להגיד לי מה אתה רואה מכאן, מה אתה מבין מהגרף הזה [תרשים 2]?

דן: שבנק הפועלים התחיל בגבוה והיתה לו מורדה [כך במקור] , אחר כך עלה טיפה והמשיך ישר. ובנק לאומי הוא עלה והמשיך ישר באותו... דיסקונט עלה, המשיך ישר, עלה עוד פעם, ירד והמשיך ישר למה שהיה ביום ה- 26 (נראה כי לאורך כל השיחה דן קורא את התאריך 25 בתור 26, ככל הנראה בגלל הקריאות הלקויה של התאריכים).

מ.: 26?

דן: בין ה- 24 ל- 26.

מ.: כן.

דן: והוא המשיך בערך באותו קו כמו ב- 29 עד ה- 31.

מ.: אוקיי.

דן: מזרחי, היה לו מורדה ואז הוא המשיך ישר ובנק בינלאומי המשיך כל הזמן אותו הדבר, לא היו לו מורדות ועליות.

מ.: עכשיו, יש לי שאלה אליך. מי לדעתך הבנק שפה הצליח הכי הרבה, נניח שנפח מסחר זה דבר טוב, הבנק שגלגל הכי הרבה כספים זה דבר טוב. איזה בנק פה גלגל הכי הרבה כספים לפי דעתך?

דן: אה, לאומי.

מ.: איך אתה רואה את זה?

דן: כי הוא עלה והוא גבוה יותר מכולם. בהתחלה זה היה הפועלים אבל אז הם ירדו ועכשיו זה לאומי.

מ.: הבנתי. ומה המשמעות של הנקודה הזאת כאן [מפגש הקו הכחול עם הירוק]?

דן: אותו כמות כסף הם גלגלו.

מ.: מתי?

דן: בזמן הזה בדיוק.

מ.: שמה הזמן הזה?

דן: שהם נפגשים אחד בשני.

מ.: ומתי זה היה בשבוע?

דן: זה היה בין ה- 24 ל- 26 [שוב, התאריך 25 נקרא כנראה על ידי דן בטעות כ- 26 אך המראיינת אינה מתקנת אותו].

מ.: אתה יכול לשער בערך מתי זה היה?

דן: כן, בין ה... ב- 25.

מ.: אז ב- 25 לחודש מה קרה?

דן: הם נפגשו, היה להם אותו כמות מסחר.

מ.: מה היית אומר אם נקודת המפגש שלהם לא היתה כאן אלא נגיד כאן [בצד הימני יותר של התרשים]?

דן: שגם היה להם, רק ביום אחר, אותו כמות מסחר.

מ.: ועדין היית אומר שבנק לאומי הוא הבנק שגלגל הכי הרבה כספים?

דן: אה, לא. כי אם זה היה כאן אז הם [בנק הפועלים] היו יותר זמן כאילו מגלגלים, יותר ימים הם גלגלו יותר כסף. [...] הם הגיעו לפה [הנקודה המקורית] ואז היתה להם הורדה. אם זה היה פה [יותר ימינה] אז הם גלגלו יותר, כי הם היו יותר גבוהים.

מ.: יותר ימים או יותר כסף?

דן: יותר ימים ויותר כסף.

מ.: ואיזה בנק פה לדעתך הכי יציב?

דן: אה, בנק בינלאומי.

מ.: למה אתה אומר את זה?

דן: כי הוא כל הזמן נשאר באותו רמה.

מ.: עכשיו, יש לי עוד שאלה. נאמר שאני יודעת שהשבוע, בשבוע האחרון, היה איזה אירוע כלכלי, איזו הודעה של נגיד בנק ישראל, שזעזעה את המערכת הכלכלית במדינה. מתי אתה חושב שזה היה, בתחילת השבוע או בסוף השבוע?

דן: ב... בערך... בתחילה. כן, כי כל הזמן בתחילה הם יורדים, פה הם עולים דווקא, הדיסקונט עולים וגם הבנק לאומי עולים, אבל בערך בתחילה-אמצע, כי כבר בסוף הם מתחילים להתאושש וכולם מתחילים להתיישר.

מ.: אהה. ממתי כולם התייצבו?

דן: ב- 29.

מ.: [...] איזה גרף יותר מעניין אותך, זה או זה?

דן: זה [השני].

מ.: למה?

דן: כי הוא נותן לי יותר תוצאות במשך יותר זמן. הוא [הראשון] נותן באותו יום וזה מראה את כל השבוע. [...]

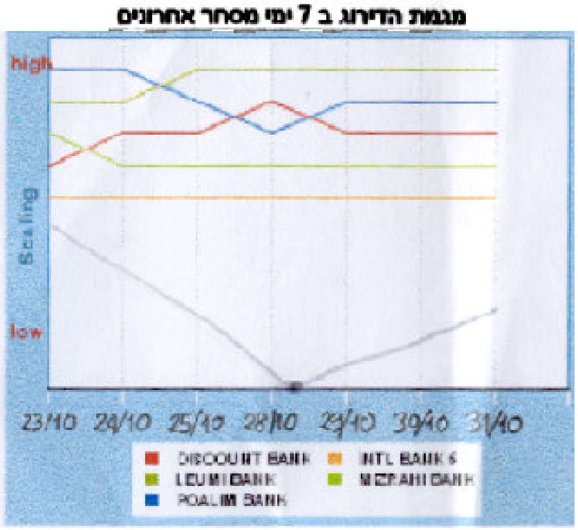
מ.: אתה חושב שכשתהיה מבוגר ותפתח עיתון ותראה גרף כזה, אתה תסתכל על זה, או שאתה חושב שזה לא כל כך יעניין אותך כשתהיה מבוגר?

דן: קשור במה אני אעסוק. גם... זה [הכוונה לתרשים 2] יצטרך די לעניין אותי יותר [...], כי זה גם יהיה קשור לבנק שאני נמצא בו מה המצב שלו. [...]

מ.: שאלה אחרונה. מה היה פירושו של דבר, אילו אחד הגרפים מבין חמשת אלה [בתרשים 2] היה נוגע בציר הזה [האופקי] וחוזר. מה היתה משמעות הדבר?

דן: שהמצב שלו היה ממש גרוע, המצב הכלכלי. אני חושב שהיה לו מפלה עסקית. וכשהוא עולה הוא מתחיל להתאושש מזה.

מ.: ומה משמעות הנקודה עצמה [המראיינת מוסיפה בעפרון גרף של בנק נוסף שמדגים את מה שאמרה, ראה תרשים 3, ומראה על נקודת החיתוך עם הציר האופקי] מה המשמעות של הנקודה הזאת, אתה יכול להסביר לי?



תרשים 3

דן: זה אמור להיות אפס אבל...

מ.: כן?

דן: הקו הזה [מראה על הציר האופקי] אמור להיות אפס, זה למטה. אבל קשור איך שעשו את הגרף, אם התחילו אותו מאלפים או מאפס.

מ.: אוקיי, נניח שמאפס.

דן: אז באותו זמן הם לא גלגלו אף סכומים.

מ.: הבנתי. ואם זה היה נגיד מתחיל מאלף, כמו שאמרת?

דן: אז שהם גלגלו מעט, או שזה מה שהיה להם כבר.

<u>ניתוח קטע מספר 1.</u>

בתחילת הקטע מודגמת התנהגות שלהערכתנו היא אופיינית לתלמידים חלשים, ואשר התייחסנו אליה בהרחבה בדו"ח הקודם (קרסנטי והרכבי, 2001): התלמיד "זורק" את התשובה הראשונה העולה בדעתו, כתגובה לשאלה. דן נשאל כמה זמן מכסה התרשים בין 23.10 ל- 31.10, וענה: חודש. מתקבל הרושם שתשובה זו נשלפה אוטומטית, ללא כל מחשבה, רק כדי לתת מענה כלשהו. ברם, בדומה למקרים אחרים שתיעדנו בדו"ח 2001, גם כאן אנו רואים שכאשר השאלה מוחזרת לדן הוא מתקן את התשובה באופן עצמאי. נחזור להרגל התנהגותי זה בהמשך הדו"ח.

לאחר מכן, ולאורך כל הקטע, בולטת יכולתו של דן לפרש ולנתח את התרשימים באורח הגיוני ונבון. יכולת זו באה לידי ביטוי כאשר דן -

- מבחין - מיזמתו - בהבדל העקרוני בין שני הייצוגים ומסביר במילים שלו את יתרונותיהם ומגבלותיהם: גרף העמודות בתרשים 1 מתאר מצב סטטי ולא דינמי ["אי אפשר לעשות את העמודה עולה ויורדת. צריך לעשות גרף חדש כל כמה זמן"]. לעומת זאת, הגרף בתרשים 2 מתאר מגמות עליה וירידה אך אינו נותן מידע מספרי מדויק ["בערך כמה זה יוצא, אם זה נשאר בערך אותו דבר או ירד או עלה"]. לקראת סוף הקטע דן מביע העדפה מנומקת לתרשים השני. נציין כי דיון בעדיפויות של דרכי ייצוג שונות אינו מסוג השאלות שתלמידי רמות ג' מורגלים אליו על פי רוב. דיון כזה מאפשר לא רק ביטוי, אלא גם פתיחת צוהר לחשיבת התלמיד, לדעותיו ולתדמיות שיש לו על המושגים והכלים שהוא משתמש בהם.

- מקשר בין מונחים מוכרים מן המציאות כ"יציבות" ו"זעזוע כלכלי" ובין מגמות בגרף. בהתייחסותו למגמות דן מוסיף מיזמתו את המונח "התאוששות", ולאחר מכן אף מנתח סיטואציה ויזואלית חדשה שהוצגה בפניו (הגרף נוגע בציר האופקי) באמצעות מינוח מציאותי ("המצב שלו היה ממש גרוע, המצב הכלכלי. אני חושב שהיה לו מפלה עסקית"). היכולת להבאת ידע חוץ כיתתי אל כיתת המתמטיקה קיימת אצל תלמידים רבים ברמות ג'. הדבר מאפשר ביטוי לשכל הישר של הלומדים ותחילת מתן לגיטימציה לקשר בין ידע אינטואיטיבי (או כזה שאינו נישב מתמטי) לתכנים הנלמדים בכיתה.

- קורא נכון את הגרפים הנתונים ומסוגל לענות על שאלות המתייחסות אליהם:

1. עומד על מגמות המסחר ומעריך מיהו הבנק המצליח ביותר בשבוע המתואר. יש לציין שדן נעזר באינטואיציה ויזואלית לפיה "גבוה יותר = טוב יותר". (במקרה זה האינטואיציה מתיישבת עם המאפיינים של הגרף).

2. מפרש נכון את משמעות נקודת החיתוך בין הגרפים של שני הבנקים המובילים, ובהינתן לו שינוי במיקום נקודה זו, מפעיל שיקול דעת ומשנה בהתאם את תשובתו לשאלה מיהו הבנק המשגשג יותר. דן מתייחס בתשובתו לשני המימדים הרלוונטיים, מימד הזמן והמימד הכספי.

3. מבחין בין מקרים אפשריים לגבי נקודת החיתוך עם הציר האופקי: דן מעלה את האפשרות שהציר האנכי אינו מתחיל דווקא באפס (אכן ציר זה מתאפיין ברישום הוליסטי של נמוך וגבוה ולא בשנתות מספריות). יתכן ש"התחילו אותו מאלפים" מה שמשנה את משמעותה של נקודת החיתוך למצב של "גלגלו מעט, או שזה מה שהיה להם כבר". העובדה שדן לא קיבל כמובנת מאליה את ההנחה שהציר האנכי יתחיל דווקא מאפס היא עובדה ראויה לציון בפרט מאחר שדן מאתגר מבחינתו את הנחת

היסוד של שיעורי הפונקציות שהוא משתתף בהם - כל הגרפים שהתנסתה בהם כיתתו מתחילים מאפס. יתכן שדן מכיר אפשרות כזאת מניסיונו מחוץ לבית הספר.

לסיכום: קטע זה מדגים היטב את יכולתו של דן לנתח ייצוג גרפי של סיטואציה כלכלית שלא נלמדה בכיתה, תוך שהוא משלב את הידע שנרכש בכיתה לגבי גרפים ונקודות חיתוך, עם ידע לא פורמלי שמקורו בהתנסויות מציאותיות מחוץ לכיתה. מקרה זה מעלה שוב את שאלת ההעברה (transfer) של הידע בכל מורכבותה; גישות שונות מביעות "ייאוש" על כך שתלמידים אינם מסוגלים ליישם ידע שרכשו בסיטואציה כלשהי, כאשר מוצגת להם סיטואציה לא מוכרת. איננו באים לטעון כי המקרה של דן מפריך טענה זו, אלא שלאור הוכחות קיום מסוימות יש לשקול מחדש אמירות גורפות כלשהן. יש להיות ערים לכך שבמקרים מסוימים תלמידים חלשים עשויים להפתיע ביכולתם "להעתיק ידע נכון" ממצב למצב.

קטע מספר 2: דן כופל מספרים שלמים במסגרת הפעילות "1 ס"מ במפה = 20 ק"מ במציאות".

המראיינת הציגה לדן פעילות שלא נלמדה בכיתתו, המופיעה בספר "פונקציות" מסדרת "הבה נלמד מתמטיקה" לרמה ג'. בפעילות נתון שלכל 1 ס"מ במפה מתאימים 20 ק"מ במציאות. התלמידים מתבקשים להשתמש בקנה מידה זה על מנת לחשב מרחקים במציאות, כלומר למעשה עליהם לכפול את המספרים הנתונים במפה ב- 20. הקטע מתעד את האופן בו דן מבצע מכפלות אלה.

דן: [קורא את השאלה בספר]: "אם המרחק במפה 4 ס"מ, המרחק במציאות הוא..." אה... [חושב מספר שניות] 80.

מ.: נכון. איך עשית?

דן: אה, עשיתי 2 זה 40 ועוד 2 יוצא 80. [...] [ממשיך לקרוא:] "אם המרחק במפה 18 ס"מ, המרחק במציאות הוא..." אה...

מ.: תגיד לי איך אתה עושה.

דן [לאחר הפסקה בת מספר שניות]: אני עושה 10 כפול 20 זה 200, [שוב הפסקה] 260... אני עושה 8 כפול 20 זה מאה... מאה ששים.

מ.: איך עשית את זה, 8 כפול 20?

דן: אני עושה 200 פחות 40.

מ.: אה. ולמה אתה עושה את זה?

דן: כי זה... אה... 10 פחות 8 זה 2.

מ.: אז בסך הכל איך עשית, עשית בהתחלה 10 כפול 20...

דן: שזה 200. ואז פחות 40 שזה 360.

מ.: בסך הכל.

דן: כן.

מ.: ואם זה היה 15 כפול 20? איך היית עושה?

דן: הייתי עושה 10 כפול 20 ואז הייתי עושה, זה יוצא, 2... [...] או שהייתי עושה 5 כפול 20 או שהייתי עושה את זה יותר פשוט, 2 כפול 20 ואז 3 כפול 20 ומחבר את זה.

מ.: אז מה זה יוצא באמת?

דן: זה.. 2 כפול 20 זה 40, ואז 3 אה... זה יוצא... 3 כפול 20... 60, ואז ועוד 200 זה יוצא, אה... [לאחר מספר שניות] 300.

מ.: פעם למדתם שיטה של כפל ארוך, לעשות 15 כפול 20 בצורה כזאת [אני רושמת את שני המספרים זה מתחת לזה עם קו תחתון]. למדתם פעם כזה דבר?

דן: כן, אבל אני לא זוכר את זה.

מ.: הבנתי. אמרת "הייתי עושה ככה או הייתי עושה ככה", מה יותר קל, 5 כפול 20 או 3 כפול 20 ועוד 2 כפול 20 ולחבר, כמו שעשית בהצעה השניה? מה יותר קל לך?

דן: לא יודע, זה כל אחד שונה, בגלל שזה קשור בלוח הכפל, נגיד אצלי לוח הכפל המספר שהכי קל אצלי זה 3. לעשות בכפולות של 3. אבל זה קשור אצל כל אחד. אני לא יודע מה הייתי עושה.

מ.: אתה חושב שיש ילדים שיותר קל להם לעשות 5 מ- 3?

דן: כן. אצל כל אחד זה שונה, שיש [מספר] אחד שהוא יותר חזק אצלו.

מ.: ואצלך המספר הכי חזק זה 3?

דן: 10 זה הכי קל. [...] יש את 1 ו- 0 ואחריהם את 3.

מ.: אז אם אני נגיד אבקש ממך לעשות 6 כפול 20, אז אתה תעשה 3 כפול 20 ועוד 3 כפול 20 או שלא...

דן: הייתי עושה אני חושב 10 כפול 20 ואז פחות... אה... ואז פחות 4 כפול 20.

מ.: אבל 6 זה גם 3 ועוד 3.

דן: כן, אבל לא הייתי חושב על זה כרגע.

מ.: אז איך אתה מסביר את זה? כי הרגע אמרת ששלוש זה המספר הכי חזק אצלך.

דן: כן, אבל 10 זה הכי קל.

<u>ניתוח קטע מספר 2:</u>

שתי תופעות בולטות ביותר עם קריאת הקטע. האחת, אסטרטגיית הכפל שדן משתמש בה: דן עובד בגמישות רבה עם חוק הפילוג ומפרק את המספרים הנכפלים ליחידות קטנות של 2 ו- 3. כך, לבד מהכפלה ב- 10, פעולות הכפל היחידות המתבצעות הן 20 X 2 ו- 20 X 3. יתר התוצאות הדרושות מתקבלות מצירופים מתאימים של חיבור וחיסור. ספציפית, אפשר לתרגם את מהלכי אסטרטגיית הפילוג שנקט בה דן בקטע זה באופן הבא:

$$\mathbf{20 \times 4} = 20 \times 2 + 20 \times 2$$

$$\mathbf{20 \times 18 =} 20 \times 10 + 20 \times 8 = 200 + (20 \times 10 - 20 \times 2)$$

$$\mathbf{20 \times 15 =} 20 \times 10 + 20 \times 3 + 20 \times 2$$

$$\mathbf{20 \times 6 =} 20 \times 10 - 20 \times 4$$

דן עורך חישובים מנטליים בלבד, ללא נייר ועפרון. האלגוריתם של הכפל הארוך הנעשה בכתב אינו זכור לו כלל. אי שליטה באלגוריתמים אריתמטיים נכתבים היא תופעה אופיינית לתלמידי רמה ג׳, כאשר רובם מפצים על כך בשימוש במחשבון אולם חלקם גם עוקפים זאת באמצעות אסטרטגיות כגון זו שהפעיל דן (נזכיר כי דן הוגדר כתלמיד חזק יחסית לתלמידי רמה ג׳ היושבים בקבוצתו. כבר ציינו בדו״ח קודם (הרכבי, 2000), כי קבוצות של תלמידי רמות ג׳ אינן בהכרח הומוגניות מבחינת הידע המתמטי. חלק מן התלמידים יושבים בקבוצות אלה מסיבות התנהגותיות ואחרות). כפי שהוסבר ברקע התיאורטי לדו״ח זה, האסטרטגיות המנטליות המיושמות על ידי ילדים ומבוגרים בנסיבות מציאותיות שונות, הן על פי רוב גמישות יותר, מגוונות יותר ואף מופעלות באופן מוצלח יותר מאשר אסטרטגיות בית ספריות קשיחות (Nunes et al., 1993, Herndon, 1971, Lave, 1988). החישובים שעורך דן הם דוגמא להפעלה מוצלחת של אסטרטגיה מנטלית. (גם בהמשך הראיון, בקטע שלא יובא כאן, כאשר דן מחשב בעקבות שאלה בספר איזה מרחק במציאות יתאים למרחק של 2½ ס״מ במפה, הוא עובד בעזרת פילוג ומפרק ל- 2 כפול 20 ועוד ½ כפול 20). ראוי לציין כי אסטרטגיות מנטליות אלה אינן נלמדות בדרך כלל על ידי הוראה ישירה, אלא הן תוצאה של תובנות התלמידים ויישום התובנות האלה להמצאת שיטות הנראות לתלמידים הגיוניות ומובנות. יישום אסטרטגיות מסוג זה והעדפתן על פני אלגוריתמים המודגשים בהוראה ובספרי הלימוד אינם נחלתם של תלמידים חלשים בלבד: סמית׳ (Smith, 1990, מצוטט אצל Smith, diSessa & Roschelle, 1993) תיאר תלמידים חזקים - כאלה שהגיעו לדרגת שליטה בתוכן מתמטי מסוים (במקרה זה, שברים) - אשר העדיפו לנצל שיטות ad-hoc שהמציאו לצורך פתרון בעיות בהשוואת שברים, על פני שימוש באלגוריתם מובנה וגלובלי. מציאת אסטרטגיות ad-hoc היא תופעה הקיימת, אם כך, אצל תלמידים חזקים

וחלשים כאחד. מה שאולי מבחין ביניהם הוא א) נכונות מלאה ויעילות של האסטרטגיה, ו-ב) מידת האומץ של התלמידים להחזיק באסטרטגיה שהמציאו אל מול הערות, תיקונים או העדפת המורה את האסטרטגיה הרשמית הפורמלית. הבחנות אלה טעונות בדיקה רחבה יותר. מכל מקום, נדגיש כי רצוי ואף חיוני כי ההוראה תיתן לגיטימציה לאסטרטגיות כאלה, גם כאשר אינן דווקא היעילות ביותר, כפי שעשוי לקרות אצל תלמידים חלשים.

התופעה השניה שראוי לתת עליה את הדעת נוגעת לחשיבה הרפלקטיבית של דן. לא זו בלבד שדן מסוגל להסביר בבהירות את מהלכי החשיבה שלו, אלא הוא גם מפעיל שיפוט לגבי דרכי הכפל האפשריות, איזו מהן קלה יותר עבורו ומדוע. הוא מדרג מספרים על פי הקלות בה הוא יכול להשתמש בהם ככופלים. בראש הרשימה נמצאים המספרים 10, 0, 1, ולאחריהם 3, שהוא על פי דן "המספר שהכי קל" אצלו. דן אינו מייחס למספר 3 תכונה "אינהרנטית" של קלות החישוב, כי אם מסביר שכך זה אצלו, ואילו אצל תלמידים אחרים תיתכנה אופציות אחרות. סביר להניח כי העובדה שדן מודע לדרגות של קושי וקלות בחישובים עם מספרים שונים, מקלה עליו בבחירת האסטרטגיה המנטלית המתאימה לכל מקרה (בכך אין הכוונה לטעון שהוא יבחר דווקא בדרך הקצרה ביותר). דוגמא זו מחזקת את הטענה שגם תלמידים מקבוצות חלשות מסוגלים לחשיבה מטה-קוגניטיבית, ואם אין תהליך זה מתפתח באופן טבעי כמו שקרה אולי אצל דן, הרי שראוי לטפחו באמצעים דידקטיים שונים.

קטע מספר 3: דן מבצע חישובים בשברים.

במסגרת הפעילות שתוארה (1 ס"מ במפה = 20 ק"מ במציאות), דן מגיע לשאלה הפוכה: נתון שהמרחק במציאות הוא 14 ק"מ, מהו המרחק במפה? כפי שניווכח, ההתמודדות עם שאלה זו אינה פשוטה עבור דן, שנושא השברים בעייתי אצלו. עם זאת, למרות הידע החסר, מודגמת בקטע יכולת הפעלת הגיון המנוצלת על מנת לרכוש ידע חדש תוך כדי הראיון.

דן: [כתשובה לשאלה המופיעה לעיל] אה... 280.

מ.: כלומר אם המרחק במפה בס"מ הוא 280, המרחק במציאות בק"מ הוא 14?

דן: לא.

מ.: למה לא?

דן: זה היה צריך להיות כאילו פה [מראה על המשבצת המתאימה למצב הפוך, כלומר אילו 14 היה המרחק במפה]. אז זה 14 אז זה אחד... [שתיקה].

מ.: אם היה לך פה מחשבון היית יכול לעשות את זה?

דן: אה, אני חושב שכן.

מ.: מה היית עושה? [מוציאה מחשבון].

דן: [עדיין ללא המחשבון] זה שלוש רבעים.

מ.: איך הגעת לתשובה?

דן: עשיתי חצי, זה 10, ואז מה חסר פה, צריך להוסיף פה 4. אז עשיתי, חשבתי שזה במקום 1 ו- 2, שזה יהיה 4 ו- 3. שלושה רבעים.

מ.: אז איך אתה יכול לבדוק את זה? אם עכשיו יש לך מחשבון אתה יכול לבדוק את זה?

דן: אני עושה נגיד 14 לחלק ל- 20, אז זה 0.7. אז גם זה יכל לצאת 0.7 התוצאה, במקום שלושה רבעים, כמו 0.5 שזה חצי.

מ.: אהה. ו- 0.7 זה שלושה רבעים?

דן: בערך.

מ.: בערך. ובדיוק אתה יודע?

דן: בדיוק? אה... לא.

מ.: ואם יש לך מחשבון אתה יכול להגיד לי בדיוק?

דן: אני לא יודע איך לעשות את זה. אני לא יודע איך להפוך את זה. לא, אני לא חושב שאני יכול.

מ.: תגיד לי למה אתה לא יכול?

דן: כי אני לא יודע איך, איך לעשות את זה.

מ.: מה זאת אומרת "את זה"? השאלה שלי היא כמה זה בעצם שלושה רבעים בעשרוני, אם יש לך מחשבון. אז אתה אומר שמה הקושי?

דן: איך לעשות את זה במחשבון, אני לא יודע מה אני צריך לעשות.

מ.: מה זה יכול להיות, שלושה רבעים?

דן: אה... שלושה רבעים. אני חושב 7 אבל אני לא בטוח.

מ.: 0.7?

דן: 0.7. או 0.8.

מ.: למה 0.8?

דן: כי זה, נגיד, בשביל לעשות שלם אני צריך לעשות שיהיה לי ארבע רבעים. ארבע רבעים זה ארבע ועוד ארבע זה 8, אז אני חושב שזה יכול להיות אותו דבר בחצאים.

מ.: מה בחצאים?

דן: בחצאים נגיד זה... אה... ארבעה רבעים זה שלם, וזה 8. שלושה רבעים אז זה כמעט שלם, חסר עוד רבע אחד, אז זה 7, אם נאמר רבע אחד זה יהפוך ל- 8 שזה יהיה שלם.

מ.: למה 8 זה שלם?

דן: כי רבעים זה מארבע המילה. ארבע ועוד ארבע שווה 8.

מ.: ורבע אחד, אתה יודע כמה זה בעשרוני?

דן: רבע אחד זה יהיה.... 2.

מ.: 0.2 אתה מתכוון?

דן: לא, רבע אחד זה 0.1.

מ.: איך אתה מגיע לזה?

דן: כי ארבעה רבעים צריך להגיע ל... ל- 8. צריך שיהיה כתוב נגיד ככה [רושם:]

$$\frac{4}{4}$$

אז אם ארבע זה אחד, רבע אחד זה אחד, אז יש לי פה ארבע רבעים ופה עוד ארבע רבעים אז זה יוצא 8.

מ.: אז כמה זה רבע אחד?

דן: רבע אחד זה 0.1.

מ.: וכמה זה חצי?

דן: 0.5.

מ.: איך אתה יודע את זה, מִידע או...

דן: מידע.

מ.: ואתה יודע להסביר את זה?

דן: אה... מתוך 10. אני חושב.

מ.: שמה?

דן: שצריך לעשות שלם, כמו עם ה- 8 שאמרתי, אז חסר עוד חמש אחד כדי שיהיה 10.

מ.: זאת אומרת החמש מתוך העשר.

דן: כן, חצי מהעשר.

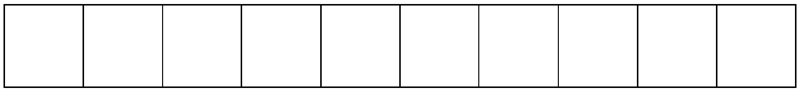
מ.: ואם הייתי אומרת לך שגם הרבע צריך להיות מתוך העשר? זאת אומרת בוא נניח שהשלם הוא עשר. סתם לדוגמא. אז חצי מהשלם הזה, אז אתה אומר 0.5. אז על פי זה כמה יהיה הרבע?

דן: 0.2.

מ.: למה 0.2?

דן: אה....

מ.: נניח שזה השלם שלי, שיש בו 10 משבצות [משרטטת מלבן של **1 x 10**, בדומה לסקיצה המשורטטת כאן כשחזור]. למה דווקא אני אומרת לך 10?



דן: בגלל מה שאמרתי על העשר וחמש.

מ.: אוקיי, וגם בגלל שמספרים עשרוניים זה כמה הם באמת יחסית לעשר. בגלל זה קוראים להם מספרים עשרוניים. אז אתה אומר לי שחמש [סופרת חמש משבצות] זה בדיוק חצי, ולכן זה 0.5 וזה 0.5 [שני החצאים של המלבן]. אוקיי? עכשיו אני שואלת אותך לפי אותה שיטה כמה יהיה רבע?

דן: אה... זה יהיה... [חושב, מסמן קווי חלוקה אחרי כל שתי משבצות]. כל שתי משבצות זה 0.2. אז ארבע פעמים אה... חמש פעמים 0.2 זה עשר.

מ.: כלומר השלם.

דן: השלם. אז רבע זה 0.2.

מ.: כמה פעמים רבע נכנס בשלם?

דן: חמישה פעמים.

מ.: וזה נשמע לך הגיוני?

דן: לא.

מ.: למה לא? כמה פעמים הוא צריך להיכנס?

דן: ארבע.

מ.: אז אתה יכול אולי לחשוב מה לעשות כדי לשפר את המצב, שייכנס רק ארבע פעמים ולא חמש פעמים?

דן: אה... [חושב].

מ.: אפשר לעשות ציור חדש [משרטטת שוב את המלבן].

דן: [משרבט].

מ.: מה אתה עושה?

דן: ניסיתי שלוש שלוש, זה לא.

מ.: למה לא?

דן: שלושה פעמים שלוש זה תשע, ואז חסר לי עוד שלוש כדי שיהיה ארבע רבעים.

מ.: אז מה אתה מסיק מזה?

דן: שזה לא שלוש.

מ.: מצד שני, גם ראינו שזה לא 2.

דן: אז זה אחד וחצי.

מ.: אתה רוצה לסמן אחד וחצי פה ולראות כמה פעמים זה נכנס?

דן: רגע, זה שתיים וחצי. כי אם זה אחד וחצי אז זה יהיה יותר גדול מהחמש. בערך שש.

מ.: והשתיים וחצי בוא תראה לי בציור?

דן [מסמן קבוצות של שתיים וחצי משבצות].

מ.: מה אתה חושב על התשובה הזאת?

דן: שזה נכון.

מ.: אתה נשמע לי בטוח, איך אתה יודע?

דן: כי יש פה אחד, שתיים שלוש ארבע.

מ.: כן. אז מה אפשר להסיק מזה על הרבע אם אנחנו רוצים בכל זאת לכתוב אותו כעשרוני?

דן: רבע זה אפס נקודה שתיים וחצי.

מ.: אז איך כותבים את זה? [דן רושם: 0. 2½].

מ.: יש עוד אפשרות אולי?

דן: אני חושב, אבל אני לא בטוח שאפשר לעשות פעמיים נקודה. 0.2.5. אבל לא נראה לי שזה הגיוני?

מ.: אולי יש עוד אפשרות?

דן [חושב, שותק].

מ.: למה זה לא נראה לך [הכתיבה של 0.2.5]?

דן: כי שתי נקודות זה לא נראה לי הגיוני, אבל עכשיו שאני חושב על זה, זה דווקא יכול להיות. כי חצי מתוך חצי, מתוך נגיד אה... אפס נקודה שתיים נקודה חמש זה חצי מתוך הרבע, כמעט רבע.

מ.: וכשאתה מסתכל אתה מצליח להיזכר אם ראית פעם רבע כזה בצורה עשרונית?

דן: אני זוכר משהו היה עם כמה נקודות. עשר, אחד, חמש אני חושב, עשר, אני לא בטוח.

<u>ניתוח קטע מספר 3:</u>

במוקד הקטע נמצא ניסיונו של דן לגשר על פערים וחסרים בידע שלו על שברים, באמצעות הפעלת אינטואיציות שונות שבבסיסן רציונל כלשהו המאפשר את הצדקתן מבחינה הגיונית. ניתן לחלק את הקטע לשני חלקים, שביניהם מפרידה התערבות מצד המראיינת. ההתערבות לא שימשה כתזכורת (משום שהידע חסר), אלא היוותה למעשה הדרכה, אשר התאפיינה במתן לגיטימציה לתשובות, הצבעה על אלמנטים של בקרה ועידוד להמשיך ולהפעיל שכל ישר.

למעשה, הפעולה שעל דן לבצע היא 14 לחלק ל- 20. לאחר שעמד על השגיאה שבניסיונו הראשון (14 כפול 20), דן מגיע תחילה לתשובה של שלושה רבעים, בעקבות מהלך חשיבה שאינו לגמרי מוסבר: הרעיון של דן הוא כנראה כי אם עבור 10 התשובה היא ½, שבר הבנוי מהספרות 1 ו- 2, הרי עבור 14, כלומר מספר הגדול מ- 10 ב- 4, תהיה התשובה ¾ , שבר הבנוי מהספרות 3 ו- 4. זוהי פרשנות אידיוסינקרטית של הסיטואציה המספרית הנתונה. משניתן לדן מחשבון, הוא יודע כי עליו לבצע את פעולת החילוק האמורה, וכך מגיע לתשובה (הנכונה) של 0.7. ברם, כעת הוא מתבקש לעמת בין תשובה זו לבין תשובתו הקודמת (¾). כאן למעשה מתחיל הדיון העיקרי. למרות שהוא חש כי שני המספרים קרובים זה לזה ("בערך"), אין לדן כלים לתאר את ¾ כשבר עשרוני. ככל הנראה אין הוא מקשר בין השבר לפעולת חילוק ולכן אינו יכול להשתמש במחשבון על מנת לבצע 3 לחלק ל- 4. לפיכך, הוא מנסה אסטרטגיה חלופית כדי "להשתכנע" שהצורה העשרונית של ¾ היא 0.7. אפשר לתאר את מהלך החשיבה של דן כך:

השלם הוא ארבעה רבעים ⇐ ארבעה רבעים זה ארבע ועוד ארבע ⇐ 8 = 4 + 4 ⇐

השלם הוא 8 ⇐ שלושה רבעים הם כמעט שלם, חסר עוד רבע <u>אחד</u>, אז זה 7 ⇐

¾ בכתיב עשרוני הוא 0.7. (באותו אופן דן מקבל שרבע אחד הוא 0.1). כלומר, בהיעדר זיכרון של "השיטה" למציאת הכתיב העשרוני, דן מפעיל שיקול שיש מאחוריו הגיון פנימי עבורו.

בחלק השני של הקטע ישנה כאמור הדרכה מצד המראיינת. דן יודע (מן הזיכרון) כי הכתיבה העשרונית של ½ היא 0.5, והוא מסביר זאת בכך שחצי מתוך השלם - שהוא הפעם 10 - הם 5. המראיינת מסבירה אפוא לדן כי בכתיבה עשרונית מתייחסים תמיד לחלקים מתוך 10, ומציגה לפניו אמצעי ויזואלי לחשיבה על הבעיה, מלבן בן עשר משבצות. מכאן ואילך מתרחש אצל דן תהליך של ניסוי ובדיקה על מנת לברר איזה מספר של משבצות "נכנס" ארבע פעמים בתוך המלבן הנתון (שוב, נראה כי הפעלת פרוצדורה פורמלית של 10 לחלק ל- 4 על מנת לגלות את המבוקש, אינה זמינה לו). דן מנסה שתי משבצות, לאחר מכן שלוש משבצות, לאחר מכן משבצת וחצי, ולבסוף מגיע לתשובה

הנכונה של 2½ משבצות, בה הוא משוכנע לאחר הבדיקה בפועל על ידי סימון בתוך המלבן. ברם, גם גילוי זה אינו מביא את דן להיזכר בכתיבה העשרונית המקובלת של 0.25, ואין זה מפתיע לאור העובדה שכתיבה זו אינה קיימת כנראה במאגר הסימנים הזמינים שלו. לעומת זאת, דן מציע שתי אלטרנטיבות אינטואיטיביות שהמציא במקום, אשר ניכרת בהן הפעלה של שכל ישר ואף יצירתיות: 2½ .0, ו- 0.2.5. בשיטת הרישום השניה דן עושה שימוש חכם בנקודה העשרונית, ורושם אותה פעמיים - צורת רישום זו מדגישה שהמספר מימין הוא חלק של המספר שלשמאלו, הדגשה שאכן נמצאת בשימוש בהקשרים מסוימים (למשל ערך הדולר כאשר הוא מוקרא בחדשות נשמע כך: 4 שקלים, 71 אגורות ועשירית האגורה).

מה ניתן ללמוד מן הראיון עם דן?

מתוך השיחה מצטייר דן כתלמיד שקול ובעל מוטיבציה. הוא ענה על השאלות ברצון ואִפשר הצצה לתוך מהלכי החשיבה שלו. כפי שצוין בהקדמה לראיון, קטעי השיחה והניתוח מעלים מספר תופעות: דן מסוגל לנצל את הידע הלא פורמלי שלו על מנת להתמודד עם מטלה בלתי מוכרת. כמו כן, הוא מפגין יכולת מטה-קוגניטיבית ראויה לציון כאשר הוא מנמק את בחירותיו באסטרטגיות כפל מסוימות. ברם, אפשר להבחין אצל דן במה שאנו מכנים בשם "פער בין חשבון וחשיבה". במקרה הספציפי של דן מדובר בפער בין יכולתו לגייס שכל ישר על מנת להתמודד עם שאלות לא טריוויאליות, ובין ה"חורים" הרבים בידע האריתמטי שלו. דן קורא בהצלחה תרשים עמודות, מנתח יפה מגמות של גרפים ומפרש היטב ובמונחים מציאותיים ייצוגים של סיטואציה כלכלית נתונה. לעומת זאת, נראה כי אינו מכיר את פרוצדורת "הכפל הארוך", אינו מקשר בין שברים ובין פעולת חילוק ואינו מכיר את הייצוג העשרוני של שבר פשוט כמו ¼.

תופעות אלה אינן ייחודיות למקרה של דן. בהמשך נראה כיצד הן חוזרות גם בניתוח של מקרים אחרים.

3.2. קטע ראיון עם הגר.

הגר היא תלמידת כיתה ט' הלומדת עם דן באותה כיתה. הגר הוגדרה על ידי המורה כתלמידה מתקשה, המשתייכת לקבוצת תלמידי רמה ג' בתוך הכיתה שבה לומדים כאמור תלמידי רמות ב' וג' יחד. ציוניה של הגר בדרך כלל נמוכים וממוקמים ברבעון התחתון של הציונים בכיתתה. מבנה הראיון עם הגר דומה לזה שנערך עם דן, ומתוכו נביא קטע אחד, המדגים אותה בעיה שראינו אצל דן בנושא של שבר עשרוני פשוט (קטעים נוספים מופיעים בדו"ח הקודם (קרסנטי והרכבי, 2001, עמ' 55).

הרקע לקטע המופיע להלן: הגר טוענת ש- ¾ ניתן לכתוב כ- 3.04, ומיד מתקנת ל- 3.4.

המראיינת מנסה להביא את הגר לידי קונפליקט, אך כפי שנראה, הדבר אינו קל לביצוע.

מ.: 3.4 זה יותר מ- 1 או פחות מ- 1?

הגר: יותר.

מ.: ו- ¾ זה יותר או פחות מ- 1?

הגר: יותר.

מ.: ¾ זה יותר מ- 1?

הגר: לא, פחות.

מ.: אז איך יכול להיות ש-¾ זה 3.4 אם 3.4 זה יותר מ- 1 ו- ¾ זה פחות מ- 1?

הגר: עוד פעם? לא הבנתי.

מ.: אמרת ש- [...] ¾ זה 3.4.

הגר: כן, נכון.

מ.: אז שאלתי אותך אם זה יותר מ- 1 אז אמרת לי כן...

הגר: לא, כן. כי ¾ זה כמו בשעון [משרטטת שעון בצורת מעגל]. בשעון, 1 נגיד זה ככה [הספרה 1 על לוח השעות] ו- ¾ זה ככה [שלושת רבעי סיבוב], הבנת?

מ.: עוד פעם תסבירי לי.

הגר: בשעון אז 1 זה ככה, זה שעה, ו- ¾ זה ככה [חוזרת על הטיעון].

מ.: אז מה את מסיקה מזה?

הגר: שזה יותר. ¾ יותר.

מ.: בואי נגיד, אם מציעים לך ¾ פרוסת עוגה או פרוסת עוגה שלמה, מה את מעדיפה?

הגר: ¾ ... אה... פרוסת עוגה.

מ.: למה?

הגר: כדי לא להשמין [צוחקת].

מ.: כי פרוסת עוגה זה יותר קטן מאשר ¾ פרוסת עוגה?

הגר: כן.

מ.: אז אם עכשיו אני אגיד לך ככה. הנה קופת חיסכון. [משרטטת ריבוע]. יש בפנים מאה דולר. את רוצה את כל הקופה או שלושת רבעי מהקופה?

הגר: כל הקופה.

מ.: אבל אמרת שאחד זה יותר קטן מ- ¾.

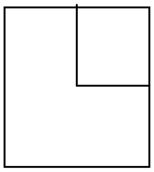
הגר: אה, ¾ מהקופה.

מ: את רוצה ¾ מהקופה?

הגר: [צועקת] לא, אני רוצה את כל הקופה!

מ.: אז מה יותר, ¾ או הכל?

הגר: אה.... ¾ זה נגיד אה... ככה [מחלקת את הקופה בציור כך (סקיצה המשחזרת את



המקור):

[בנימה של גילוי] אה! זה יותר. אחד זה יותר. כי אחד זה שלם. אני רוצה את כל הקופה, לא ¾.

מ.: אה. אז ¾ יכול להיות שלוש ומשהו?

הגר: כן. לא.

מ.: כן או לא?

הגר: ¾ זה... כן. לא.

מ. [בחיוך]: את מבלבלת אותי, תחליטי.

הגר: לא. זה אפס נקודה... שלוש נקודה... שלוש נקודה ארבע. לא, שלוש נקודה אפס ארבע. [לבסוף רושמת]:

0.3|4

<u>ניתוח הקטע:</u>

הנקודה העיקרית שנרצה להדגיש בניתוח, היא החסך האריתמטי. אך לפני כן, אין אנו יכולים להתעלם מן ההיבט האַפקטיבי הבולט בקטע: הגר מפגינה חוסר ביטחון, תשובותיה לא יציבות ותלויות במידה רבה בתגובות המראיינת, אשר אליה מתייחסת הגר ככל הנראה כמקור סמכות. פעמים מספר הגר משנה את תשובתה, אולי משום שהיא מסיקה מתוך הניסוח או האינטונאציה של השאלה המופנית אליה, שהיא מצופה לכך. למרות זאת, ישנם שני מקומות בהם הגר מגינה על טענותיה, האחד בדימוי השעון שהיא מציגה (ראה בהמשך) והשני כאשר היא משתכנעת לבסוף, בעזרת שרטוט הקופה, ששלם הוא יותר מאשר ¾. במקומות אלו יש אחיזה בהגיון ויזואלי כלשהו המעניק להגר צידוק להגן על עמדתה. כבר ציינו כי התופעה של "חוסר עמידות" בפני סמכות, אשר על פי התרשמותנו מאפיינת תלמידים חלשים רבים, טעונה בדיקה נרחבת יותר.

בתחילת הקטע נראה כי הגר אינה מסוגלת "למקם" את השבר ¾ ביחס למספר 1. תופעה זו נראית תמוהה לאור הציפייה כי בגילה של הגר כבר קיימת תפיסה אינטואיטיבית של כמויות חלקיות ל- 1 הנמצאות בשימוש יומיומי כגון - חצי, רבע, שני שליש, "שלושת רבעי" (כפי שמספר זה נהגה ביומיום). מדוע הגר טוענת כי ¾ גדול מ- 1? להערכתנו, הסיבה לטענה הזו נעוצה בהנחה הראשונית שהניחה הגר, הנחה אשר למעשה היא אינה מתנתקת ממנה כמעט עד סוף הקטע, והיא ש- ¾ נכתב עשרונית כ- 3.4. כתיבה זו נשענת על אימוץ של קירבה מספרית כתחליף להיעדר המשמעות. במילים אחרות, כתיבת ¾ כ- 3.4 מבוססת אולי על החלפת הסימן / בסימן נקודה, כמפריד בין שני מספרים שלמים. זוהי התייחסות צורנית על פני השטח, שאינה מניחה למשמעות לחדור. ההנחה ש- ¾ זהה ל- 3.4 מכתיבה את הסדר ¾ > 1. הגר מגינה על טענתה באופן מקורי להפליא, באמצעות דימוי השעון, אף על פי שבדימוי זה עצמו נראית בבירור התפיסה האינטואיטיבית והנכונה של ¾ כשלושה רבעים של סיבוב, כלומר פחות מסיבוב אחד; אולם גודל זה מושווה לא לסיבוב שלם אלא למספר "1" כפי שהוא מופיע על השעון, והרעיון הזה מגויס בידי הגר להוכחת הטענה ששלושת רבעי גדול יותר מ- 1. גם לאחר מכן, בדימוי העוגה, הגר דבקה בעמדתה, כלומר טוענת ש- ¾ פרוסת עוגה היא כמות גדולה יותר מאשר פרוסת עוגה. רק כאשר מוצגת להגר המחשה ויזואלית של "1" בתור שלם, הגר חוזרת לאינטואיציה הטבעית ומכריזה ש"אחד זה יותר. כי אחד זה שלם". גם לאחר הארה זו היא עדיין אינה מסוגלת להחליט אם ¾ ניתן להיכתב כ"שלוש ומשהו" או לא. אם כן, נראה שהבעיה של הגר היא בכך שהידע האריתמטי שלה בכל הנוגע לכתיבה העשרונית הוא לקוי, ואינו מקושר

לאינטואיציות הטבעיות. הגר אינה מסוגלת לרשום ¾ כשבר עשרוני, כשם שדן, כפי שראינו בקטע מס׳ 3 מתוך הראיון עמו, אינו יודע כיצד לרשום ¼ כשבר עשרוני. למרות שאצל שניהם קיימת תפיסה בסיסית של מהות המספרים הללו, כשהם מופיעים כשבר רגיל (דן מתייחס בבירור לרבע כאל מספר ש״נכנס ארבע פעמים בתוך 1״, וגם הגר בסופו של דבר ממחישה באופן ויזואלי את ¾ כשלם פחות רבע), הכתיבה העשרונית נדמית בקטעים אלו כ״ארץ לא נודעת״ עבור דן והגר. יתכן שיש גם אלמנט של בשלות שאינו נלקח בחשבון כאשר מלמדים כתיבה עשרונית. במקרה כזה התוצאה היא שצורת כתיבה זו מונחתת על ילדים שאינם רואים בה משמעות אך מחויבים לעבוד אתה, ואז עלול להתרחש נתק מן המשמעות האינטואיטיבית של שברים. מעניין, שבהעדר הידע המתאים, שני התלמידים מציעים צורת כתיבה מקורית משלהם - 0.2½, 0.2.5, 0.3|4.

בקטע באה אפוא לידי ביטוי תופעה ידועה, שלהערכתנו נפוצה מאד בקרב תלמידים בהקבצות נמוכות (ומקומה אינו נפקד גם בקרב תלמידים מהקבצות גבוהות): תלמידים מגיעים לחטיבת הביניים כאשר הידע האריתמטי שלהם לוקה בחסרים רבים. לא מדובר רק בשברים; לעתים קרובות ישנו קושי בארבע פעולות החשבון, אפילו במספרים נמוכים. לשם הדגמה, נראה להלן מספר דוגמאות של קשיים שנצפו אצל תלמידים בכיתות שביקרנו בהן:

- תשובות ספונטניות אצל תלמידים בכיתות ח׳ וט׳: 2 כפול 4 שווה 6, 4 כפול 4 שווה 8, 12 לחלק ל- 2 שווה 5. אמנם, התלמידים שביצעו שגיאות אלה היו מסוגלים בניסיון שני לומר מהי התשובה הנכונה, אך לא תמיד מתאפשרת סיטואציה שבה הכדור מוחזר אליהם לניסיון נוסף. כך קורה שבמבחנים למשל, טעויות מסוג זה גוררות כישלון במשימות שונות.
- חוסר אפשרות לתת תשובה לשאלות הבאות (תלמידים בכיתה ח׳): 8 כפול 8, 120 לחלק ל- 2, 350-450, , גם כאשר ניתן זמן למחשבה.

ברצוננו להדגיש, כי חסרים אריתמטיים מסוג זה בהחלט אינם נחלתם של כל תלמידי רמות ג׳. כפי שציינו ואף הדגמנו בדו״חות הקודמים, תלמידים לא מעטים מסווגים להקבצות נמוכות לא בשל אי שליטה בחומר של שנים קודמות כי אם בשל בעיות התנהגות, יכולת ריכוז נמוכה וסיבות אחרות. נתקלנו בתלמידים היושבים בהקבצות אלה אשר הפגינו יכולת חישובית נאותה ולעתים אף יותר מכך. אולם, כאשר מורים בהקבצות הנמוכות נתקלים בתופעה של אריתמטיקה בסיסית הלוקה בחסר, עלולה להתפתח אצלם תחושה של ״הילדים הללו אינם מסוגלים לכלום״. כתוצאה, דועך הרצון לקדם אצל התלמידים הבנה מתמטית שהיא מעבר לאריתמטיקה. בלא לזלזל במטרה החשובה של הקניית ידע בסיסי בחשבון, ידע שלכל הדעות נחוץ לצורך ניהול חיים אזרחיים תקינים, אנו מוצאים לנכון להדגיש כי לא רצוי לעכב את התקדמותם של תלמידים בהכרת מושגים מתמטיים מורכבים יותר, עד שתושג שליטה הולמת באריתמטיקה. התרשמותנו היא, כי גם תלמידים המתקשים

בפעולות חשבון מסוגלים (ויותר מכך, מעונינים!) לעסוק במשימות המערבות חשיבה מתמטית מסדר גבוה יותר. ניתן להתמודד עם שיפור מיומנויות החשבון במקביל, ולא כתנאי, להוראת מושגים ותהליכים מתמטיים. בהקשר זה ראוי להזכיר את השיטה שנוקט בה אחד מבתי הספר בהם ביקרנו, חטיבת ביניים במרכז הארץ. תלמידי כיתה ט׳ בבית ספר זה לומדים את החומר המיועד לכיתה ט׳, אך בנוסף לומדים שעה שבועית של תגבור אריתמטי, חזרה על ארבע פעולות החשבון, לוח הכפל ושברים.

3.3. קטע ראיון עם אורי.

אורי הוא תלמיד כיתה ח׳, הלומד מתמטיקה בהקבצה נמוכה. בכיתת מתמטיקה זו לומדים התלמידים שהוגדרו כחלשים ביותר בשכבה. אורי הוא תלמיד בעייתי מבחינת משמעת, מרבה להסתבך בקטטות ומתקשה להתרכז למשך פרקי זמן משמעותיים. עם זאת, כאשר הזדמן למראיינת לשבת לידו מספר פעמים במהלך הביקורים בכיתתו, התברר כי אורי מסוגל להתרכז במשימות קצרות טווח, להתמודד, לחשוב ואף להצליח. מעבר לכך, התרשמנו שהוא אף נהנה מן הפעילות. ברם, קיים פער בין יכולת החשיבה של אורי כפי שהיא באה לידי ביטוי בעל פה, ובין תוצאות אותה חשיבה כשהן מתבטאות בכתב. הקטע הבא ממחיש זאת.

רקע: המראיינת ביקרה בכיתתו של אורי סמוך לתחילת שנת הלימודים. המורה עבדה עם תלמידיה על הכנה לקראת למידת משוואות ממעלה ראשונה, בעזרת חומרי למידה שנכתבו במכון ויצמן. על פי הגישה המוצגת בחומרי למידה אלו, ניתנות בשלב זה של הלימוד שאלות בנוסח השאלה הבאה:

חשבתי על מספר מסוים, הוספתי 7, ואת הסכום כפלתי ב- 3. קיבלתי 36. מהו המספר?

המטרה היא לפתח אצל התלמידים תחושה של נעלם, אשר אפשר לחפשו בדרכים של ניחוש מושכל ו״עבודה אחורנית״. המהלך ההוראתי בנוי כך שבהדרגה מוחלף הניסוח המילולי בסמלים, כאשר עדיין ערכו של הנעלם (x, a וכדומה) מתקבל בעזרת אסטרטגיות דומות. באופן זה נשמרת תחושת המשמעות של ״פתרון״ כמספר שהצבתו תיתן פסוק אמת. בהמשך ניתנות שאלות אשר קשה לנחש את פתרונן ונוצר צורך ללמידת אסטרטגיות פורמליות של פתרון באמצעות העברת אגפים. מהלך זה אינו מכוון רק על מנת להגיע ליעד של לימוד טכניקות לפתרון משוואות; הרעיון הוא לעבור באופן ״חלק״ ככל האפשר בין פתרונות אינטואיטיביים בראש לבין אסטרטגיות כתובות, כך שהתלמידים יחושו שיש הצדקה להכנסת סמלים כדרך להכליל ולייעל פתרונות. במלים אחרות, הסמלים אינם אמורים להיות מונחתים ללא הסבר, אלא להגיע כתוצאה של תהליך ״מיסוד״ החשיבה הלא פורמלית תוך ניסיון לשמור אותה תמיד ברקע כבסיס הגיוני ונחוץ של הפורמליזציה.

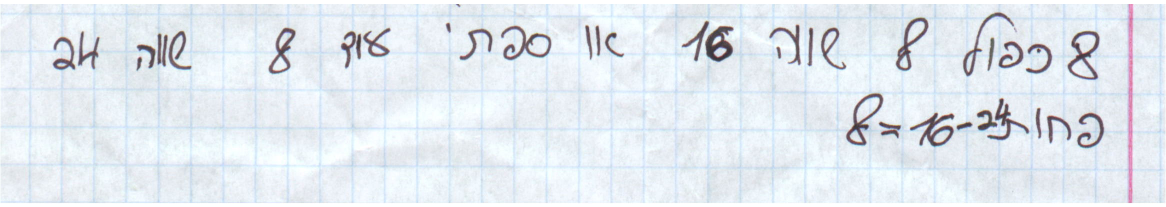
ברם, תלמידים רבים מסרבים למעבר הזה ונראה שהם מתקבעים בשלב ה"לא פורמלי", כפי שמדגים המקרה של אורי להלן.

כאמור, המראיינת הגיעה בשלב ראשוני של הלימוד, וביקשה מאורי לפתור את השאלה הבאה:

לקחתי מספר וכפלתי אותו ב- 3. הורדתי 16 וקיבלתי בחזרה את המספר. מה המספר?

בשאלה זו לא ניתן "לעבוד אחורנית", מאחר ששרשרת הפעולות מסתיימת במספר הנעלם, ולכן אין עוגן של תוצאה מספרית עליו אפשר להישען כנקודת מוצא לפעולות הפוכות. למרות זאת, אורי השיב על השאלה תוך כחצי דקה, תשובה נכונה: המספר הוא 8.

הנימוק שנתן אורי בעל פה התבסס על הרעיון הבא: 16 זה פעמיים שמונה מתוך שלוש פעמים המספר. נימוק זה משקף ניתוח פשוט ונבון של הנתונים. ברם, משהתבקש אורי לרשום את הנימוק בכתב, התקבלה התשובה הבאה (תרשים 4):



תרשים 4

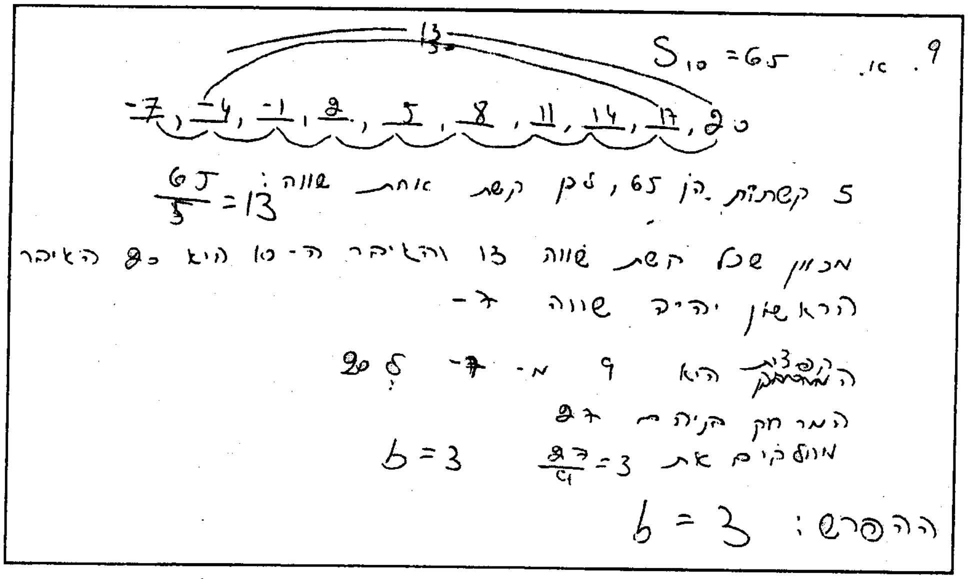
בתשובה זו באים לידי ביטוי קשיים מרובים במעבר מהחשיבה שבעל פה להבעת רעיונות מתמטיים בשפה פורמלית. אורי כותב "כפול" במקום "ועוד", ורושם 8=16-24 כאשר כוונתו ל- 24-16=8. תשובת אורי בגרסתה הכתובה בלבד (במסגרת מבחן, למשל), היתה מזמינה אי הבנה ו/או פסילת התשובה, ומכל מקום וודאי לא היתה מזוכה בקרדיט מלא.

המקרה של אורי מדגים את הבעיה המכונה "קושי בכתיבה פורמלית". בספרות המחקרית מרבים לדון בפערים בין אסטרטגיות מנטליות המניבות פתרונות נכונים לבעיות, ובין אסטרטגיות פורמליות שהשימוש בהן מעלה את אחוז הטעויות (ראה בסקירת הספרות לדו"ח זה). בדרך כלל הכוונה במילה "פורמלי" היא לשימוש בסמלים ובמספרים בתוך מבנים של פרוצדורות מוגדרות (כגון "חילוק ארוך", "העברת אגפים" וכו'), תוך צמצום השימוש במילים. תשובתו של אורי לעיל מראה, כי יתכן שהבעיה של כתיבה פורמלית קיימת אצל תלמידים מסוימים אף בשלב מוקדם יותר. כוונתנו לשלב של העברת רעיונות - המשקפים לעתים, כמו במקרה של אורי, חשיבה ברמה גבוהה - לשפה כתובה כלשהי, אשר לאו דווקא מתייחסת לסמלים מתמטיים. אפשר, כי עבור אותם תלמידים דווקא הקושי בשלב זה הוא המוקד שעליו יש לתת את הדעת; טיפול המדגיש את ההבעה המילולית בכתב של רעיונות שהתקבלו מהפעלה של שכל ישר, תוך שימוש מינימלי בסמלים, עשוי

לקדם תלמידים כאלה (בהנחה שאין לקות למידה אחרת). במלים אחרות, הבעיה של אורי, ואולי של תלמידים רבים אחרים, היא בעיקר במעבר בין הרעיון הנכון, המופשט והחכם (לזהות את 16 בתור 2x) לבין סוגים שונים של העברת הרעיון לצורה סבירה של קומוניקציה. אחד העקרונות המנחים של תכנית ש״י, שנועדה לסייע לתלמידים מתקשים להתמודד עם בחינת הבגרות (ראה בסקירת הספרות), הוא לתמוך בתלמידים לפתח כלים לאותה קומוניקציה, אשר הפתרון הפורמלי הוא רק אחד מביטוייה. על מנת להמחיש כיצד יכולים תלמידים לענות על שאלות תוך מתן עדיפות להסבר מילולי על פני מניפולציות סימבוליות, נביא להלן שתי דוגמאות לפתרון של שאלות, מתוך מבחן מסכם שניתן בכיתה י״ב על נושאים מבחינת הבגרות ברמת שלוש יחידות. הפתרונות לקוחים ממחברות התשובות של תלמידים שלמדו על פי תכנית ש״י, והן הופיעו בדו״ח מחקר קודם על תלמידים חלשים במתמטיקה (הרכבי, 1999).

דוגמא 1. בתרשים 5 מובאת תשובת תלמיד לשאלה הבאה בסדרות:

בסדרה חשבונית $a_{10} = 20$ ו- $s_{10} = 65$ מצא את a_1 ואת d.



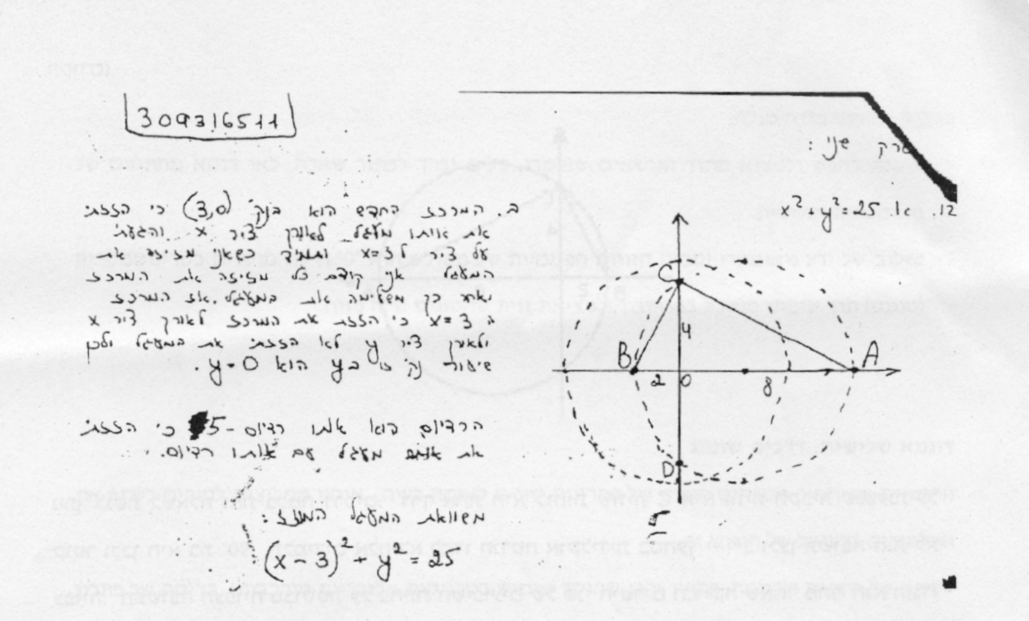
תרשים 5

הפתרון הקלאסי לשאלה זו קורא להעמדת שתי משוואות עם שני נעלמים, על סמך נוסחאות המצויות בטבלה בדף הנוסחאות המצורף למבחן. למעשה, בשאלות מעין זו

התלמיד מתבקש להראות יכולת לפתור מערכת משוואות מבלי להפגין שום ידע מושגי על סדרות. הפתרון המוצג בתרשים 5 איננו משתמש בידע פורמלי (נוסחאות), אך במהלכו התלמיד מראה הבנה של המושגים ואסטרטגיית פתרון נכונה.

דוגמא 2. בתרשים 6 מובאת תשובת תלמידה לשאלה הבאה בגיאומטריה אנליטית:

מהי משוואת המעגל המתקבל כאשר מזיזים את המעגל $x^2 + y^2 = 25$ שלוש יחידות ימינה?



תרשים 6

בדוגמא זו התלמידה מסבירה במלים את כל מהלך הפתרון שלה. הטקסט שכתבה התלמידה משקף הבנה של הנושא המתמטי, הכוללת את המרכיבים הרלוונטיים העיקריים (למשוואה של מעגל דרושים מרכז ורדיוס, הזזת המעגל משפיעה על המרכז אך לא על הרדיוס ולכן הזזת המרכז מספיקה על מנת לקבוע את המשוואה החדשה, הזזה בכיוון ציר x אינה משפיעה על שיעור y של המרכז). בעקבות הבנה זו מסוגלת התלמידה לכתוב את המשוואה הנכונה של המעגל המוזז. ההסבר המילולי נשען על תמונה שציירה התלמידה ואשר מתארת את ההזזה ואת מקום המרכז החדש (המשולש ABC צויר אחר כך לצורך תשובה לסעיף אחר בשאלה). התמונה מהווה בסיס ל"ראייה" של כל המרכיבים שצוינו לעיל. אמנם אין כאן עדות מפורשת, אך התמונה עשויה גם לעזור להימנע מהשגיאה הנפוצה לפיה הזזה לכיוון החיובי של ציר x מתבטאת ב- x+3 (במקום x-3).

שתי הדוגמאות ממחישות את הצורך בכך שההוראה תסייע לתלמידים (לא רק לחלשים אך במיוחד להם) למצוא דרכים לבטא, לנמק, ליצור אסטרטגיות בדרך כלשהי, לאו דווקא

פורמלית (דרך ורבלית, ציורית וכדומה). כאשר תלמידים לומדים ליצור קומוניקציה, הדבר עשוי לתרום לכך שיהיו מסוגלים להעביר רעיונות ועל ידי כך לקבל לגיטימציה עבורם. עם הלגיטימציה מתגבר הביטחון העצמי ביכולת האישית, ולבסוף אף תיתכן יותר מוכנות - נפשית וקוגניטיבית - לקראת הפורמליזציה וההכללות אשר ממהרים כל כך להמטיר על התלמידים ואשר על פי הבנתן או אי הבנתן נקבעת לעתים קרובות התדמית של ילד שאינו מסוגל להתמודדות עם למידת מתמטיקה.

3.4. המקרה של דביר: תצפיות בכיתה וראיון.

דביר הוא תלמיד כיתה ח׳ בחטיבת ביניים במרכז הארץ. הוא משובץ להקבצה החלשה בשכבה, בה לומד גם אורי, שהוזכר לעיל. הכרנו את דביר במהלך ביקורים שבועיים שקיימנו בכיתתו. התרשמנו שדביר הוא תלמיד חסר סבלנות, הסובל מדימוי עצמי נמוך מצד אחד, ומצד שני מגלה רצון להוכיח שהוא טוב במתמטיקה; אחד הדברים הראשונים שאמר למראיינת, לאחר שפתר בהצלחה תרגיל שניתן לו, היה - "תגידי למורָה שאני מצליח, היא חושבת שאני גרוע במתמטיקה".

החומר שנלמד בכיתתם של דביר ואורי בעת ביקורינו היה, כאמור, משוואות פשוטות ממעלה ראשונה (ראה סעיף 3.3 לעיל). במהלך הביקורים בכיתה הסתבר לנו, כי דביר מגלה התנגדות חזקה לשימוש באותיות כמייצגות נעלמים. טענתו המתמשכת היתה, כי אין כל צורך בכתיבת משוואות בעזרת x, משום שאפשר לפתור את התרגילים שהמורה נותנת באמצעות ניחוש בלבד. כך למשל פתר דביר את התרגיל הבא שהופיע בדפי העבודה שחילקה המורה:

חשבתי על מספר מסוים, הוספתי 8, ואת הסכום כפלתי ב- 2. קיבלתי 40.

א) השלם: המספר שחשבתי עליו x.

[כלומר נקודת הפתיחה של התרגיל היא שיש להשתמש ב- x].

לאחר שהוספתי 8 ________ תשובה צפויה: x+8. תשובת דביר: 20.

לאחר שכפלתי ב- 2 _______ תשובה צפויה: (x+8)2 או 2x+16. תשובת דביר: 40.

ב) כתוב משוואה מתאימה ___________

ג) נחש את פתרון המשוואה __________

לסעיפים 2 ו- 3 דביר כלל לא התייחס. על פי גישתו, הוא מצא את התשובה, המספר הוא 12, ובזה נגמר העניין. המראיינת ציינה בפני דביר שפתרונו יפה, שבעצם הוא דילג ישר לסעיף השלישי, וביקשה ממנו להשלים בכל זאת את הסעיפים הקודמים. אז התברר שלדביר יש קושי לעבוד עם הסמל x, למשל הפעולה של הוספת 8 ל- x כלל לא היתה

ברורה לו. בשלב זה דביר התרגז ושאל את המראיינת: בשביל מה בכלל המציאו את x? זאת בטח המצאה חדשה. כשאת למדת בבית ספר היו איקסים?

המראיינת הסבירה לדביר שהיו איקסים, שזאת המצאה ישנה מאד, ושטוב מאד שהוא יכול לנחש, אך יתכן שבעתיד יהיו מקרים שבהם לא יוכל לנחש ולכן כדאי להכיר עוד שיטה. דביר לא קיבל טענה זו, וטען בתוקף שהוא יכול למצוא את פתרונו של כל תרגיל ללא שימוש ב- x. כתגובה, נתנה לו המראיינת את התרגיל הבא, שקשה מאד לנחש את פתרונו (ולמעשה הוא משוואה ריבועית):

לקחתי מספר, כפלתי אותו בעצמו, הוספתי 100, ואז קיבלתי את המספר שלקחתי, כפול 20. מה המספר?

דביר ישב דקות ארוכות במשך השיעור וניסה לפתור את התרגיל על ידי ניחוש. הוא לא הסכים להראות את מהלכיו, אך שב וטען שתוך שעה יצליח לפתור. (בינתיים התפתחה בינו ובין אורי דינמיקה מעניינת סביב התרגיל הנ"ל, אשר נעמוד עליה בהמשך, בפרק העוסק באינטראקציות בין זוגות תלמידים). לנוכח המאמצים הללו אמרה המראיינת לדביר שזהו תרגיל קשה מאד, ושתתן לו תרגיל אחר, קל יותר, אך הוא לא הסכים. רק משהגיעה שעת סיום השיעור נעתר לקבל תרגיל אחר כעבודת בית. התרגיל היה זה:

לקחתי מספר, כפלתי אותו ב - 2, הוספתי 3 וכפלתי שוב ב- 2. כשהורדתי 21 קיבלתי חזרה את המספר המקורי. מה המספר?

על פי רוב, דביר אינו נוהג להכין שיעורי בית, כמוהו כרוב חבריו לכיתה. זוהי אחת ההתנהגויות האופייניות לתלמידים בהקבצות נמוכות, כפי שכבר הזכרנו בסקירת הספרות. להפתעת המראיינת, הביא דביר את התרגיל פתור לשיעור הבא. בתשובתו של דביר הופיעו 10 שורות של ניחוש וטעייה, מחוקות, ובשורה העשירית התשובה הנכונה - 5, כתובה כך:

$$5·2+3=13·2=26-21=5$$

לפני כן ניסה דביר את המספרים הבאים: 10, 7,6,4, 3.5.

במהלך אותו שיעור עבד דביר לסירוגין על ארבעה תרגילים נוספים שהציגה לו המראיינת. למרות הקושי הניכר של דביר לעבוד ברצף (כל גירוי חיצוני בכיתה הסיח את תשומת לבו), בכל זאת לא ויתר ופתר את כל ארבעת התרגילים, כולם באופן נכון ובלי להשתמש ב- x. התרגילים היו:

1. לקחתי מספר, הוספתי לו 13, הכפלתי ב- 2 וקיבלתי 36. מה המספר?
2. לקחתי מספר, הורדתי ממנו 5, חילקתי ב- 5 וקיבלתי 5. מה המספר?
3. לקחתי מספר, הוספתי לו 27, חילקתי ב- 10 וקיבלתי את המספר שהיה בהתחלה. מה המספר?

4. עט ומילוי עולים יחד 2.50 ש"ח. העט עולה ב- 2 ש"ח יותר מהמילוי. כמה עולה העט וכמה עולה המילוי?

לגבי השאלה האחרונה, שאל דביר מה פירוש ב- 2 יותר. המראיינת נתנה לו דוגמא - אם המילוי עולה 10 א"ג, העט עולה 2.10 . לאחר מכן דביר פתר נכון את השאלה ונראה מרוצה מאד מעצמו. לקראת סוף השיעור נראה אפוא כי דביר צבר ראיות נוספות לטענתו כי אפשר להסתדר היטב ללא איקסים. בסוף השיעור ישבה אתו המראיינת שוב, בניסיון להראות לו איך פותרים את התרגיל שעשה בבית בעזרת x, ולבדוק יחד אתו האם יש לשיטה זו יתרונות. דביר ישב בחוסר רצון בולט, ואמר שוב שלא צריך איקסים וממילא הוא גם לא יודע איך לעשות עם איקסים. מאחר שהמשתנה x כבר היה "טעון" במוטיבציה שלילית, הציעה המראיינת לקרוא לנעלם בשם אחר, למשל a, ודביר הסכים. המראיינת ודביר תרגמו יחד את הנאמר בתרגיל למשוואה:

$$2\cdot(2a+3)-21= a$$

עד לשלב זה נראה היה שדביר מבין. לאחר מכן, הגיע דביר כמעט ללא סיוע לשורות הבאות:

$$4a+6-21=a$$

$$4a-15=a$$

כאן, כאשר ניסתה המראיינת להראות לו שאפשר להוריד a משני האגפים ולקבל $3a-15=0$, איבד דביר את סבלנותו. נראה היה שהוא התנתק ממשמעות התרגיל. לכן הציעה המראיינת שמכאן [$3a-15=0$] ימשיכו בדרך המוכרת לדביר, ושאלה - מה פחות 15 ייתן 0? תשובת דביר: 15. המראיינת הוסיפה ושאלה - 3 כפול מה ייתן 15? דביר: 5. המראיינת הדגישה שהנה, הגענו לתשובה 5. היא ודביר ספרו את השורות וגילו שהתשובה התקבלה תוך חמש שורות במקום עשר, כפי שהיה ב"שיטת הניחוש". אז אמר דביר בקוצר רוח שזה לא משנה, כי זה לוקח יותר זמן, ובזמן הזה כבר יכול היה לפתור בדרך שלו, וחוץ מזה זה נורא קשה והוא לא יכול לעשות את זה לבד. שוב חזרה המראיינת ואמרה, שבהמשך יהיו תרגילים אותם אפשר יהיה לפתור רק תוך שימוש באיקסים, ושבבחינת הבגרות למשל שואלים שאלות כאלה. תגובת דביר היתה שאין לו כוונה לגשת לבחינת הבגרות במתמטיקה. הוא ארז את חפציו ויצא מן הכיתה.

בתום השיעורים הללו ניסינו להסביר את התנהגותו של דביר. אחת ההשערות היתה, כי התנגדותו לשיטה הפורמלית נובעת מן התופעה אותה תיאר דניאל חזן בספרו (Chazan, 2000, ראה סקירת הספרות לדו"ח זה), והיא חוסר ההתאמה בין המסלול שחווה לעצמו התלמיד (the student's personal trajectory), ובין התוכן הנלמד בשיעורי המתמטיקה. התרשמנו כי דביר הוא תלמיד המעריך אתגרי חשיבה מספריים (ברמה שהוא מסוגל לה) ונהנה להוכיח שהוא יכול להתמודד עמם בהצלחה. יחד עם זאת, יתכן שאין הוא רואה כל

טעם בעבודה סימבולית משום שלא השתכנע ביעילותם של סמלים וגם לא ברלוונטיות שלהם לחיים כפי שהוא רואה אותם. השערה נוספת שעלתה היא, כי כישלון קודם בעבודה עם סמלים תרם להיווצרות מעגל, כך שחוסר המוטיבציה גורם אך גם ניזון מן הקושי לעבוד עם ייצוגים סימבוליים של נעלמים. יתכן שקושי זה גורם לדביר להציג את עצמו כלא מעוניין בבחינת הבגרות, למרות שלמעשה הוא כן מעוניין בה. מכל מקום, התוצאה היא שקיים אצל דביר מחסום מוטיבציוני לגבי חומר לימודים שהוא בבחינת ״קריטי״, כלומר הכרחי להמשך לימודי המתמטיקה שלו. השערות אלה הביאו להחלטה להזמין את דביר לראיון שלא במסגרת הכיתה, על מנת לבדוק מקרוב את מקורות ההתנגדות שלו לסימבוליקה. הראיון המלא יובא להלן.

<u>ראיון עם דביר.</u>

דביר נענה להזמנה לראיון ברצון, והראיון התקיים בחדר שהוקצה לכך בבית הספר. במהלך הראיון התקשה דביר להתרכז בדבר אחד למשך פרק זמן העולה על מספר דקות. דעתו הוסחה בקלות על ידי קולות מבחוץ, ולעתים קרובות קטע את דברי המראיינת, אפילו באמצע משפט, כדי לשאול שאלות כמו - מה השעה, כמה זמן נותר, האם היא תרצה לראות ציור שצייר ועוד. למרות זאת בדרך כלל התעניין בשאלות שנשאל ועשה מאמצים להתמודד אתן, כפי שנראה בהמשך.

סקירה כללית של הראיון. הראיון תוכנן סביב פעילות משחק, שמטרתה להגביר את המוטיבציה להשתמש בשפה סימבולית. המשחק מבוסס על רעיון של ״טריק במספרים״, מתוך ספר האלגברה של ג׳ייקוב (Jacobs, 1979) כפי שעובד על ידי מגידסון (Magidson, 1999), ראה תרשים 7.

Example of number trick that always ends with the original number

pick a number	θ		x
multiply by 3	θθθ		3x
add 2	θθθμμ	3x+2	
double it	θθθμμ θθθμμ	6x+4	
subtract 4	θθθ θθθ		6x
divide by 6	θ		x

תרשים 7

תיאור המשחק:

בחר מספר, הכפל אותו ב- 3, הוסף 2, את התוצאה שיצאה לך הכפל שוב ב- 2, הפחת 4 וחלק ב- 6.

בסיום תהליך זה מתקבל, כפי שנראה בבירור בתרשים 7, אותו מספר שנבחר בהתחלה. לאחר שהתלמיד מתנסה במספר מקרים ועומד על עובדה זו, הרעיון הוא לברר מדוע זה קורה תמיד, תוך חיפוש דרכים להוכיח זאת. לתלמיד מוצגת האפשרות להשתמש בשפה של תמונות (כלומר ריבועים ועיגולים) כפי שמופיע בתרשים 7, ולאחר מכן הכוונה היא להגיע - מתוך המוטיבציה לחסוך את הרישום המייגע של ריבועים ועיגולים - לייצוג סימבולי פורמלי באמצעות נעלם.

בהתייחס למשחק הנ"ל, ניתן להציג את הראיון על פי ההתרחשויות הבאות:

א. הקדמה קצרה.
ב. דביר מתנסה במשחק.
ג. דביר מנסה לספק הסבר משכנע לתוצאה שהתקבלה.
ד. הצגת שיטת "הריבועים והעיגולים"; דביר מחבר "טריק מספרים" חדש.
ה. מעבר לשימוש באיקסים, כתיבת "טריק" חדש.
ו. שיחה על הרלוונטיות של הייצוג באמצעות x, פתרון משוואה לדוגמא.
ז. דביר פותר משוואות נוספות תוך חשיבה רפלקטיבית על הקשיים שלו.

להלן נביא את תמליל הראיון כשהוא מחולק לקטעים על פי ההתרחשויות הללו. כל קטע מלווה בניתוח, ולבסוף יוצג סיכום כללי.

(מ.= מראיינת, ד.=דביר).

א. הקדמה קצרה. דביר נשאל לגבי המקצועות המועדפים עליו בבית הספר, והשיב שהוא אוהב שיעורי חשבון (כך בניסוחו), אנגלית ואולי גם ערבית.

מ.: אז שיעור מתמטיקה זה שיעור שאתה אוהב?

ד.: כן.

מ.: וזה תמיד היה ככה או רק לאחרונה?

ד.: תמיד אהבתי לפתור תרגילים.

מ.: [...] כשהיית ילד יותר קטן, אז גם אהבת מתמטיקה?

ד. אה, לא, אף פעם לא נמשכתי לזה. סתם, אני גם לא הייתי כל כך אוהב מתמטיקה, אני רק הייתי, כאילו, אוהב לפתור תרגילים, זה עושה לי הרגשה טובה.

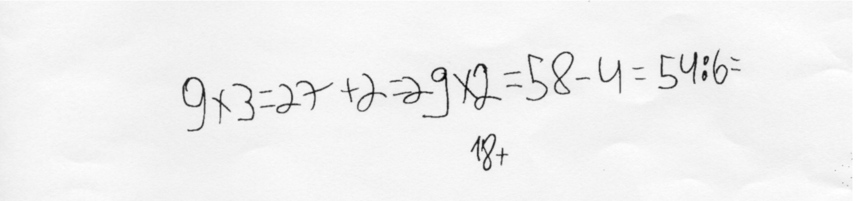
מ.: עושה לך הרגשה טובה לפתור תרגילים?

ד.: כן.

בקטע קצר זה באה לידי ביטוי ההפרדה של דביר בין "תרגילי חשבון" לבין "מתמטיקה". דביר מעיד על עצמו, באופן המאשר את התרשמותנו מן השיעורים, כי העיסוק בתרגילים חביב עליו - אכן ראינו כי הוא מוכן להשקיע זמן בעיסוק זה, ואף מוצא בו עניין, כל עוד הוא עושה זאת בדרכו. אולם, מצד שני דביר טוען שהוא "לא כל כך אוהב מתמטיקה"; יתכן שכאן כוונתו למערכת הנוקשה של חוקים ופרוצדורות פורמליות שעליו לשנן וליישם במהלך שיעורי המתמטיקה. בהמשך נראה, כי הנושא הפורמלי מטריד את דביר והוא חושש כי אין ביכולתו לזכור את כל המצופה ממנו. שוב, אנו חשים כאן את הדואליות של מוכנות ואף יכולת לעסוק במספרים תוך הפעלת שכל ישר, מול בעייתיות בתחום הזכירה והשינון של מערכת שנראית לא יעילה ומשמעותה לא ברורה.

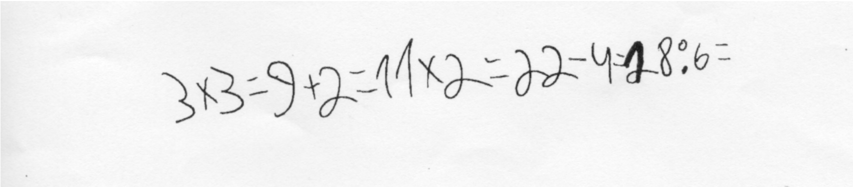
ב. דביר מתנסה במשחק.

הניסיון הראשון של דביר - בחירת המספר 9 - מתועד בתרשים 8.



תרשים 8

כשהגיע דביר לסוף השורה, אמר שהמספר שיצא בסוף לא מתחלק ב- 6. המראיינת הציעה לו להשתמש במחשבון, ואז הגיע ל- 9, ועמד על העובדה שזהו המספר שבחר בהתחלה. דביר טען שהוא מכיר את "הדרך הזאת", אבל היה מוכן לנסות עוד מספר. הפעם ניסה 3 והגיע לשורה הבאה (תרשים 9):



תרשים 9

תחילה טעה דביר והגיע בסוף השורה ל- 28 במקום 18. הוא חישב במחשבון 28:6, ואמר - לא יוצא. יחד עם המראיינת עקב אחרי המהלך, ולבסוף שאלה אותו כמה זה 22 פחות 4.

ד.: אה, 18 [צוחק].

מ.: 18. לחלק ל- 6?

ד.: אז רגע, רגע, התבלבלתי ב... כתבתי בטעות 2. שלא תחשבי שחשבתי באמת שהתוצאה זה 2.

מ.: לא, אני לא חושבת.

ד.: כתבתי בטעות.

מ.: אוקיי, אז כמה זה 18 לחלק ל- 6?

ד.: רגע [דוחה את המחשבון המוצע לו]. לא, לא צריך. לחלק ל- 6 זה... 4. לא 4, 3.

מ.: ומה המספר שהיה בהתחלה?

ד.: 3.

מ.: 3. אז אתה מתחיל לראות פה משהו או עוד לא?

ד.: בטח שאני רואה!

מ.: מה אתה רואה?

ד.: שכל מה שהיה בהתחלה זה...

מ.: זה מה?

ד.: זה המספר שאני אקבל בסוף.

מ.: אתה חושב שזה יהיה נכון לכל מספר שניקח?

ד.: [בביטחון] כן.

מ.: ואם אני אבחר מספר שלילי?

ד.: אני לא יודע.

מ.: רוצה לנסות?

ד.: בסדר.

מ.: טוב, אז תבחר מספר שלילי.

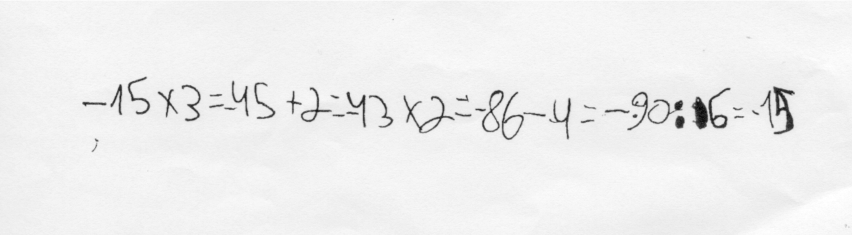
ד.: מה זה, מה הכוונה מספר שלילי?

מ.: מספר יותר קטן מאפס.

ד.: אה, מינוס למשל?

מ.: כן, מינוס.

דביר בוחר במספר -15, ורושם את השורה הבאה (תרשים 10):



תרשים 10

המקום היחיד בו דביר התלבט הוא ‎-86-4‎, שם שאל "זה ‎-90‎? לא", והמראיינת אישרה שאכן זה ‎-90‎. דביר המשיך:

ד.: תשעים לחלק ל- 6 זה 15.

מ.: נכון. אז מינוס תשעים לחלק ל- 6, כמה זה?

ד.: 15.

מ.: אבל תשעים לחלק ל- 6 זה 15 .

ד.: רגע, אז מינוס תשעים לחלק ל- 6, אה, זה מינוס 15.

מ.: נכון.

ד.: [קצת בכעס] למי זה משנה?

<u>ניתוח קטע ב':</u> מקטע זה עולה כי דביר מסוגל לבצע פעולות חשבון אלמנטריות באופן סביר, אם כי הנטייה שלו לטעות מדי פעם יוצרת רושם שאין הדברים שגורים אצלו היטב. כמו כן הוא חוזר על צורת הכתיבה הרציפה שכבר ראינו קודם בשיעורים (למשל - ‎(9×3=27+2=29×2=58-4=54:6=18)‎, אשר אמנם אינה עומדת באמות המידה של כתיבה מתמטית נאותה, אך קל לזהות בה את הזרימה הטבעית של שרשרת החישובים שדביר מבצע. דביר מבחין מיד כי בסוף השרשרת מתקבל המספר ממנו התחיל.

ראוי לתת את הדעת על האספקט האפקטיבי של קטע זה: נראה כי דביר מעונין להראות שליטה במספרים. הדבר מתבטא בכך שהוא:

- ממהר להדגיש לאחר שטעה - "כתבתי בטעות 2. שלא תחשבי שחשבתי באמת שהתוצאה זה 2".
- דוחה את השימוש במחשבון עבור החישוב 18:6, כנראה על מנת להעביר מסר שחישוב זה פשוט מאד עבורו (אף על פי שתשובתו הספונטנית היא 4).

- מציין, כשהוא נשאל לאחר ניסוי שני המספרים אם הוא רואה מה קורה, "בטח שאני רואה!". הדברים נאמרו בטון כמעט נעלב, כמו לרמוז שעצם העלאת השאלה מטיל ספק ביכולתו להבחין במשהו טריביאלי.
- מתרגז על ה"קטנוניות", כביכול, של המראיינת, הרומזת (אם כי לא במפורש) לאי נכונותה של התשובה 90:6=15- . אפשר לראות במחאה של דביר ["למי זה משנה?"] ביטוי לרצונו להרגיש שתשובתו כן נכונה, משום שאחרי הכל מדובר "רק" בשינוי סימן ולא במספר שגוי.

ג. דביר מנסה לספק הסבר משכנע לתוצאה שהתקבלה.

לאחר שלוש הדוגמאות הללו, דביר בטוח במסקנה שהתהליך שנעשה תמיד יחזיר את אותו מספר שנבחר בתחילה. השאלה שהופנתה כעת לדביר היא - למה זה עובד?

ד.: כי זה... כמו שאת תעשי שתיים פחות אחד, שווה אחד, ושתיים ועוד אחד, שווה שתיים. קיבלת אותו דבר. זה איזשהו תהליך.

מ.: אז אני רוצה שתנסה להראות לי, בתהליך הזה, למה זה עובד?

ד.: כי אתם באתם, אתם חיברתם איזשהו תהליך, עשיתם ככה, ניסיתם ניסיונות וזה עד שהגעתם לזה, אז ראיתם שמזה יצא לנו, מה שקיבלנו בהתחלה, ואז ניסיתם עוד ועוד ועוד. את מבינה?

מ.: זה נכון מה שאתה אומר, באמת ניסינו עד שנגיע למשהו שעובד, אבל אני רוצה שאתה תראה לי למה זה עובד. תראה, נגיד עכשיו יבוא ילד אחר, בסדר, הוא לא ממכון ויצמן, והוא ישאל אותך למה זה עובד. אז אתה לא יכול להגיד לו כי ככה עשיתם, חיברתם עוד ועוד ועוד עד שזה עובד. [...]

ד.: מה זה איך? עשיתם, עשיתם, עבדתם, עשיתם, עד שהגעתם לתוצאה. מה זה איך?

[לאחר עוד כמה טיעונים מאותו סוג, דביר לא מצליח למצוא דרך לשכנע איך התהליך עובד. לבסוף הוא אומר, בהתייחס לשאלה האם יוכל להסביר זאת לאחיו הקטן:]

ד.: בטח. נו, אני אגיד לו ניסיתי ככה, עשיתי כפול זה, כפול זה, ניסיתי הכל, אתה רואה, בסוף קיבלתי את התוצאה שבחרתי.

מ.: וזה מספיק משכנע?

ד.: [בהתרגזות] בטח שזה מספיק משכנע! זה מה שהיה, זה מה שעשיתם, מה, היה לכם מקל קסמים שעשיתם את זה? נו מה.

<u>ניתוח קטע ג׳:</u> בתחילת הקטע נראה, כי יש לדביר אינטואיציה בסיסית נכונה לגבי התהליך על פיו נוצר הטריק - מדובר בפעולות הפוכות ה״מקזזות״ זו את זו. ברם, כשהוא מתבקש להתייחס ספציפית לתהליך של הטריק בו התנסה, אין ביכולתו לנתח את הפעולות הכרוכות בו, והוא עובר לסוג שכנוע שאפשר לכנותו ׳חיצוני׳. במלים אחרות, דביר אינו מתייחס ל״מתכון״ של הטריק עצמו, כי אם טוען באופן כללי שהטריק עובד משום שהוא פרי השקעת מחשבה של אלה שחיברו אותו. כאן באה לידי ביטוי דרך החשיבה של דביר על בעיות אתן הוא מתמודד. דביר, כפי שראינו בתצפיות בשיעורים, עובד על פי שיטת הניסוי והטעייה. בדבריו בקטע זה יש מעין הנחה נאיבית ש״כך עושים כולם״. המילים ״עשיתם ככה, ניסיתם ניסיונות וזה עד שהגעתם לזה, [...] ואז ניסיתם עוד ועוד ועוד״ מבטאות את מה שמצטייר לו כשיטת פעולה סיסטמטית המבטיחה הצלחה. זאת בניגוד להצלחה מקרית, כפי שהיא מבוטאת בדבריו ״מה, היה לכם מקל קסמים שעשיתם את זה?״. בנקודה זו בראיון החליטה המראיינת כי הבשילו התנאים להצגת השיטה הויזואלית לתיאור הטריק, כפי שנראה בקטע הבא.

ד. הצגת שיטת ״הריבועים והעיגולים״; דביר מחבר ״טריק מספרים״ חדש.

בשלב זה הציעה המראיינת לדביר להראות לו שיטה, בעזרתה אפשר להשתכנע בכך שהתהליך תמיד עובד. המראיינת רשמה את המתואר בתרשים 7 לעיל, כאשר ריבוע מייצג את הנעלם וכל עיגול מייצג יחידה מספרית אחת (1). למרות התרגזותו הקודמת, דביר מיד התעניין בשיטה שהוצגה לו. לבסוף שאלה המראיינת:

מ.: מה אתה אומר, זה יותר או פחות משכנע ממה שאמרת קודם?

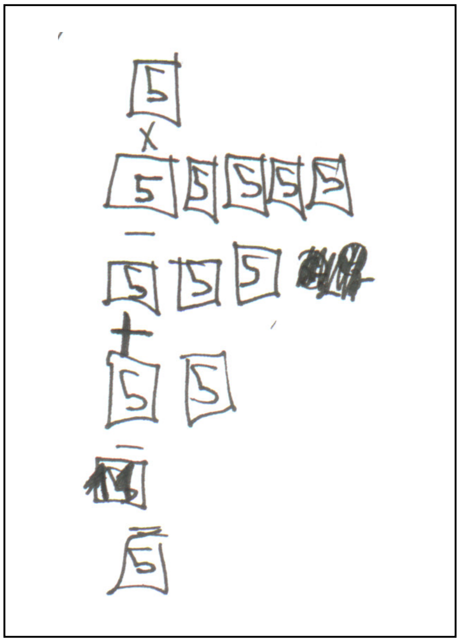
ד.: יותר משכנע [אומר זאת בנעימה הנשמעת כנה]. אבל אני לא ידעתי לעשות את זה, מאיפה אני יודע איך אתם עשיתם את זה, אתם [קצת בלגלוג] במכון ויצמן.

המראיינת שאלה את דביר אם הוא מוכן להמציא ״טריק״ דומה, שבסופו יתקבל המספר שנבחר בהתחלה. דביר השיב שהוא מוכן לנסות, אך אמר שלא ישתמש בשיטה שהוצגה לו, כי ״מה זה שווה לפי השיטה הזאת?״. הוא התרכז במשימה במשך מספר דקות, מבלי שהרשה להתבונן בעבודתו. לבסוף הציג את הטריק שלו:

לבחור מספר, להכפיל ב- 5, להחסיר 15, להוסיף 10, להחסיר 11.

ניסינו זאת על המספר 4 והטריק עבד ($4\times5=20,\ 20-15=5,\ 5+10-11=4$), אך תוצאה זו היתה מקרית. (בירור קצר מעלה ש- 4 הוא המספר היחיד שיענה על ״טריק״ זה, מאחר שלמעשה התרגום של הטריק הוא המשוואה $5x-15+10-11=x \Leftrightarrow 5x-16=x$, שפתרונה היחיד הוא $x=4$).

המראיינת שאלה את דביר כיצד הגיע לטריק שלו, ואז הראה דביר את הרישום המופיע בתרשים 11 להלן.



תרשים 11

המראיינת "תרגמה", יחד עם דביר, את המהלך שהציע לשפת הריבועים והעיגולים, כמתואר בתרשים 12 (שחזור של הרישום המקורי). מתוך התבוננות בתרשים נוכח דביר שהמהלך לא יחזיר את המספר שנבחר בהתחלה. לאחר מכן ניסה זאת על המספר 3 וראה שאכן התקבל לבסוף המספר -1 ולא 3.

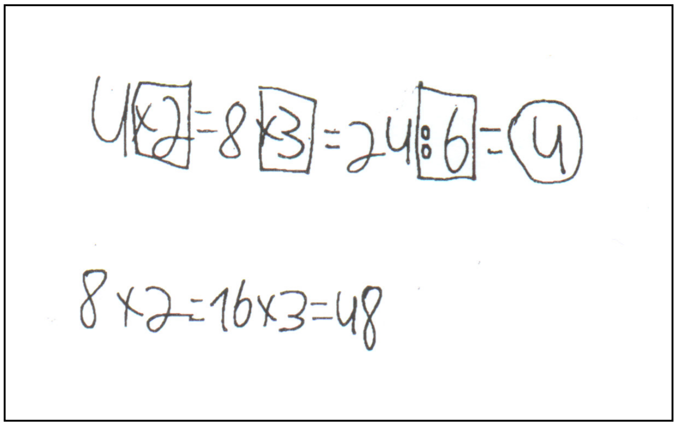
לבחור מספר	θ
להכפיל ב- 5	θθθθθ
להחסיר 15	θθθθθ - μμμμμμμμμμμμμμμ
להוסיף 10	θθθθθ - μμμμμμμμμμμμμμμ + μμμμμμμμμμ ⇳
להחסיר 11	θθθθθ - μμμμμ
	θθθθθ - μμμμμ- μμμμμμμμμμμ ⇳ θθθθθ - μμμμμμμμμμμμμμμμ

תרשים 12

בשלב זה דביר הביע רצון לנסות שוב, והפעם הפיק את הטריק הבא:

לבחור מספר, להכפיל ב- 2, להכפיל ב- 3, לחלק ב- 6.

הפעם וידא דביר שהטריק פועל בעזרת הצבת שני מספרים (ראה תרשים 13). כשסיים אמר בביטחון: זה הולך על כל המספרים.



תרשים 13

כשתרגמה המראיינת את הטריק לשפת הריבועים והעיגולים, שאל דביר מיד - מה הקשר? , אולם כשהסתיים הרישום הסכים שהוא אכן מתאר את מה שעשה.

<u>ניתוח קטע ד׳:</u> הנקודה המעניינת בקטע זה היא שדביר מצד אחד "קונה" את השיטה שהוצגה לו, כלומר מכיר מיידית בעדיפותה על פני הנימוקים שהעלה קודם לכן (קטע ג׳ לעיל), אך מצד שני אינו מאמץ אותה ככלי ליישום. כשהוא רושם את הטריק שלו, מתקבלת מעין הכלאה בין שיטת הניסוי והטעייה - שהיא, כפי שראינו, השיטה הבסיסית של דביר לפתרון תרגילים נומריים שונים - לבין מאפיינים צורניים מתוך השיטה החדשה שראה. במילים אחרות, דביר רושם ריבועים ועיגולים ללא המשמעות המוצמדת להם במקור (ריבוע = נעלם, עיגול = מספר), אלא כ"מסגרות" למספרים. בטריק השני, בהצבה השניה דביר כבר זונח גם את השימוש הצורני הזה. אפשר לשער, שהסיבה לאי יישום השיטה החדשה היא חשיפה בלתי מספקת אליה; בשיחה שקיימנו עם סו מגידסון, מחברת הפעילות (Magidson, 1999), הוסבר כי מניסיונה ההיכרות עם השפה הצורנית החדשה דורשת מספר שעות לכל הפחות. אם כך, לא צפוי שהיא תיושם לאחר הצגה שטחית בת מספר דקות. למרות זאת, חשוב להדגיש שוב את העובדה שדביר מצא את השיטה הזו משכנעת. כמו כן, ראויה לציון העובדה שדביר התעניין בחיפוש עצמאי של טריק, הקדיש לכך מחשבה ניכרת ועבד ברצינות. אנו רואים בכך "הוכחת קיום" נוספת לכך שגם

תלמידים חלשים עשויים לגלות עניין ויכולת יצירה, אם הם נתקלים באתגר המהווה גירוי למחשבה.

ה. מעבר לשימוש באיקסים, כתיבת "טריק" חדש.

בשלב זה המראיינת עברה להתייחסות אל המשחק בשפה סימבולית פורמלית יותר.

מ.: עכשיו יש לי אליך שאלה. מה אם הייתי מראה לך את זה עם איקסים, שאתה לא אוהב.

ד.: כן.

מ.: אני זוכרת שאתה לא אוהב. אבל תראה איך אפשר להמציא בקלות, עוד יותר בקלות, תרגיל כזה. נגיד בחרתי מספר, קוראים לו x. בסדר?

ד.: כן.

מ.: בוא נכפיל אותו נאמר ב... אני יודעת מה, ב- 3, אז זה 3x, בסדר? אוקיי?

ד.: [מלמול לא ברור].

מ.: עכשיו נגיד אני אומרת להוסיף לו... איזה מספר אתה רוצה? תגיד מה שאתה רוצה.

ד.: חמש.

מ.: נוסיף לו 5. אוקיי? [דביר ממלמל הסכמה] ואת כל זה נכפיל ב- 2 [רושמת: $2(3x+5)$].

כעת, כתגובה לבקשה לפשט את הביטוי, הציע דביר לקחת את ה- x מתוך ה- 3x, לצרף אותו ל- 5 ולקבל 5x. הוא שאל אם זה נכון, וכשהמראיינת אמרה שיש איזו טעות, אמר שככה המורה הסבירה לו שעושים. לנוכח הקושי הזה, הציעה המראיינת לחזור לייצוג באמצעות ריבועים ועיגולים. בייצוג זה ידע דביר לומר שלאחר ההכפלה ב- 2 יתקבלו ששה ריבועים ועשרה עיגולים.

מ.: עכשיו, אני רוצה להגיע חזרה למספר שהיה בהתחלה. אז מה אפשר לעשות? [...]

ד.: מה היה המספר שהיה בהתחלה?

מ.: הנה, ריבוע. לא יודעת מה הוא היה.

ד.: אבל מה הוא היה פה [בייצוג של $2(3x+5)$]?

מ.: לא היה, הוא היה x. עוד לא בחרתי. אני מנסה להראות לך איך עושים את זה, איך מתכננים את זה, בלי לבחור את המספר. אם היה לי מספר, הכפלתי אותו ב- 3, הוספתי 5, הכפלתי את הכל ב- 2, הגעתי למצב הזה, נכון? [מתייחסת לייצוג של הריבועים והעיגולים]. עכשיו אם אני רוצה לחזור למצב הזה [מציירת ריבוע בודד], כי זה כל הרעיון, שנגיע חזרה למה שהיה, אני יכולה למשל להוריד 10. אתה מסכים אתי?

ד.: כן.

מ.: ואז אני אגיע לפה [משרטטת שישה ריבועים]. נכון?

ד.: כן.

מ.: ועכשיו מה אני אעשה כדי להגיע לפה [חוזרה]?

ד.: תורידי חמש.

מ.: חמש מה?

ד.: חמש איקס.

מ.: אבל אני לא יודעת מה היה ה- x. איך אפשר להגיע מפה לפה בקלות? פה יש שישה ריבועים ופה אחד. אז מה אפשר לעשות?

ד.: עושים זה לחלק לזה.

מ.: לחלק ל...

ד.: לחלק ל...

מ.: לכמה?

ד.: למספר, ל... שש.

המראיינת מסכמת את התהליך:
קח מספר, תכפיל ב- 3, תוסיף 5, תכפיל ב- 2, תוריד 10, תחלק ב- 6, קיבלת את מה שהיה קודם.

ד: ווי, כל תרגיל לעשות ככה? כל תרגיל? כל תרגיל לעשות ככה, או וואה. [...] את יודעת כמה תרגילים יש שם בדף?

מ.: איזה דף?

ד.: שהיא [המורה] חילקה. [...]

כעת חוזרת המראיינת לייצוג באמצעות x.

מ.: בעצם זה אותו דבר. יש לי x. הנה הוא. הכפלתי אותו ב - 3, הנה זה [מראה על 3x]. הוספתי חמישה מספרים [מראה על 3x+5]. עכשיו אם אני כופלת את הכל ב- 2, כמה לדעתך צריך לצאת? [...] כמה מספרים?

ד.: 2 ועוד 5.

מ.: 2 ועוד 5?

ד.: לא. שתיים, אה... עשר, עשר מספרים.

מ.: אני אקבל עשר מספרים, נכון. וכמה איקסים?

ד.: שש.

מ.: אני אקבל ששה איקסים, כי פעמיים שלושה איקסים זה שש איקסים. ואני אקבל עשר מספרים כי היו חמישה והכפלתי ב- 2. עכשיו, מה המורה הסבירה לך פה, תסביר לי, כי אני רוצה להבין מה היתה הבעיה?

ד.: היא לא מסבירה טוב, היא חושבת שאני מבין כמו שהיא מבינה. היא מסבירה לי... אני אומר לה אני לא מבין את זה, אני לא מבין את זה, והיא לא מבינה, היא חושבת שאני יודע הכל.

מ.: היא חושבת שאתה יודע הכל ולכן היא לא מסבירה לך טוב? זה העניין?

ד.: כן.

מ.: הבנתי. [...] ואם אתה רואה את הקשר בין זה לזה [הייצוג באיקסים והייצוג בריבועים ועיגולים], אז אתה רואה מה לעשות? [דביר לא מקשיב, מתעסק עם המחשבון]. עזוב שניה את המחשבון. אם אתה רואה את הקשר בין הצורה הזאת של הכתיבה לצורה הזאת של הכתיבה, אתה כן רואה מה לעשות?

ד.: פחות או יותר.

מ.: אז בוא ננסה עוד דוגמא, בסדר? לקחתי x, הכפלתי ב- 4, אוקיי? הוספתי 2, וכפלתי ב - 5. [תוך כדי דיבור רושמת: $5(4x+2)=$] אתה יכול להגיד לי מה אני אקבל?

ד.: רגע, לקחת x ...

מ.: הכפלתי ב- 4, הוספתי 2 וכפלתי ב- 5.

ד.: איקס כפול 4, כמה זה?

מ.: כמה זה, זה תלוי באיקס. איקס הוא לא ידוע, הוא הריבוע שלנו. לקחתי מספר, הכפלתי ב- 4, הוספתי 2 וכפלתי ב- 5. מה אני... מה, איך אני יכולה לכתוב את זה בצורה אחרת? בלי סוגריים?

ד.: [מגיע עצמאית ל- $20x+10$].

מ.: נכון מאד, מצוין.

ד.: [בכעס] אבל פתרתי את התבנית, לא פתרתי את הפתרון! לא הגעתי ל- [מצטט הוראה של תרגיל] "פשט או פתור", מה זה?

מ.: אוקיי. כן עשינו "פשט", מה שעשינו עכשיו זה נקרא לפשט. פישטת מצוין.

ד.: מה עם "פתור"?

מ.: רגע, "פתור" - אז אני צריכה לתת לך משוואה. עוד לא נתתי לך משוואה, זה היה רק פישוט.

ד.: [נרגע] טוב.

<u>ניתוח קטע ה׳:</u> בתחילת הקטע שוב ניכרת הבעיה של דביר עם עבודה בעזרת נעלמים המיוצגים באותיות. ברגע שנכתבת התבנית $2(3x+5)$, דביר ״הולך לאיבוד״ ומציע הצעות פישוט אידיוסינקרטיות. כאשר חוזרים הסמלים הויזואליים, שוב נעשית הפעולה החשבונית שקופה - כופלים את הריבועים לחוד ואת העיגולים לחוד. במילים אחרות, המודל הויזואלי שימש כמודל מתווך, שכוחו נובע לאו דווקא מפשטות (קיימת במודל זה מורכבות מסוימת בהבחנה בין משמעות הייצוגים השונים עבור נעלם ועבור מספר), כי אם מכך שהוא מאפשר למשמעות להישאר קרובה, בדומה למה שקורה בעבודה מנטלית. גם כך, נראה כי עצם ההפשטה היא קשה עבור דביר, שיש לו נטייה חזקה לעבוד עם מספרים קונקרטיים; דבר זה ניכר משאלתו ״מה היה המספר שהיה בהתחלה?״, בשעה שכל העבודה שנעשתה מתייחסת למספר כלשהו, שאין לו ערך נקוב מראש.

דביר מסוגל לסיים את תהליך חיבור הטריק החדש ולחזור למספר המקורי [קרי: הריבוע הבודד], אך במשפט רפלקטיבי הוא מביע את רתיעתו מן השיטה, אשר כפי הנראה מצטיירת לו כארוכה, מייגעת וגוזלת זמן. דווקא רתיעה זו יכולה היתה לשמש מנוף מוטיבציוני ללמידת הייצוג באותיות, אך דביר מדגיש שוב ושוב שהוא פשוט אינו מבין מה עושים עם האותיות הללו, ושהסברי המורה אינם מסייעים לו [״אני אומר לה אני לא מבין את זה, אני לא מבין את זה, והיא לא מבינה, היא חושבת שאני יודע הכל״]. דביר מבין היטב שיש כאן משהו לא ברור, שהוא מאד ברור למורה, אשר מצפה שזה יהיה ברור גם לו. זהו מקור נוסף לנתק על רקע תחושת אי-ביטחון. אמנם, לבסוף נראה כי המעבר הלוך ושוב בין הייצוג הצורני ובין הייצוג באותיות סייע לדביר, שכעת מסוגל לפתוח את הסוגריים $5(4x+2)$.

בסוף הקטע ישנה נקודה אַפקטיבית הראויה לציון: דביר צועק ״לא פתרתי את הפתרון! לא הגעתי ל״פשט או פתור״, מה זה?״. יש בצעקה זו ביטוי לתסכול של מי שמעוניין לעמוד בציפיות של המערכת ממנו אך בה בעת לא ברור לו מה משמעות הדבר.

ו. שיחה על הרלוונטיות של הייצוג באמצעות x, פתרון משוואה לדוגמא.

בקטע זה הפנתה המראיינת שאלות מטה-קוגניטיביות ישירות לדביר, והדבר הוביל לכיוונים נוספים בהקשר לקשיים בפתרון משוואות:

מ.: יש לי שאלה אליך. מה נראה לך יותר קל, להשתמש בריבועים ועיגולים, או להשתמש באיקסים ומספרים? לך באופן אישי, אני לא מדברת עכשיו על כל הכיתה. לך.

ד.: זה [האיקסים] יותר קצר. אבל מי צריך את זה בחיים, מי משתמש בזה?

מ.: על זה, בדיוק על זה רציתי לשאול אותך. כי זה מה שאתה כל הזמן אומר לי.

ד.: מי משתמש, אף אחד לא משתמש בזה בחיים.

מ: אף אחד לא משתמש בזה בחיים.

ד.: אף פעם לא ראיתי קבלן שמסמן איקסים ו.. וריבועים במשוואות.

מ.: הבנתי. אבל בוא נגיד שהחיים זה בית ספר, בסדר? אני מסכימה אתך שלא ראית קבלנים ואולי הרבה אנשים לא משתמשים בזה. אבל בוא נגיד שהחיים הם בבית ספר. בשביל לקדם אותך במתמטיקה מכיתה לכיתה. אתה חושב שאתה יכול להשתמש בסמלים האלה?

ד.: מה? [מפהק].

מ.: בתוך בית ספר, זה גם נראה לך לא שימושי? [דביר לא עונה]. מתי בפעם הראשונה נתקלת בזה שמשתמשים באותיות?

ד.: השנה.

מ.: רק השנה?

ד.: מה זה, מה זה באותיות?

מ.: באותיות, x, a, b, במקום במספרים. השנה?

ד.: רק השנה. בשנה שעברה היינו לומדים שתיים a, אחד a, יותר פשוט. עכשיו אנחנו לומדים להכפיל ב-x, כפול x.

מ.: למשל תראה לי תרגיל משנה שעברה שהוא פשוט.

ד.: לא יודע, לא זוכר.

מ.: מה, למשל כזה דבר [רושמת:] 2a+1=8, כזה דבר?

ד.: אני לא זוכר, אני לא זוכר.

מ.: ואיך זה, קל או קשה?

ד.: כן, זה מה שהיו עושים. זה קל.

מ.: איך אתה פותר את זה?

ד.: נו, שתיים a ועוד 1, זה שתיים a ועוד 1.

מ.: לא הבנתי.

ד.: [מגחך] שתיים a ועוד 1 זה שלוש a. לא...

מ.: שתיים a ועוד 1 זה שלוש a... אבל אם אני אכתוב את זה בצורת ריבועים, אם ה- a שלי עכשיו זה ריבוע, יהיה לי פעמיים כזה ומספר אחד [משרטטת שני ריבועים ועיגול].

ד.: נו?

מ.: אז אפשר לחבר אותם?

ד.: לא.

מ.: לא. אז איך בכל זאת פותרים את זה?

ד.: לא יודע.

מ.: אז אם אני אשאל אותך את זה אחרת, איזה מספר הכפלתי ב- 2, הוספתי 1 וקיבלתי 8? לקחתי מספר...

ד.: מה, שתיים כפול אה... [חושב, ממלמל] שתיים כפול... אין, אי אפשר.

מ.: אפשר.

ד.: אי אפשר.

מ.: אולי זה לא יוצא שלם?

ד.: צריך פה שהתוצאה פה [הכוונה ל- 2a] תהיה 7.

מ.: נכון.

ד.: ותוסיפי אחד ויהיה 8.

מ.: ואין אף מספר שאני אכפיל ב- 2 ויהיה 7?

ד.: אין, מה פתאום, שניים ושמונה, זה לא זוגי.

מ.: רגע, רגע, אין אף מספר בעולם שאם אני אכפיל אותו ב- 2 אני אקבל 7?

ד.: שתיים וחצי.

מ.: שתיים וחצי?

ד.: רגע, אולי.

מ.: שתיים וחצי כפול 2 זה 7?

ד.: לא יודע.

מ.: אתה כן יודע. [צוחקת] יש לי הרגשה שאתה יודע טוב מאד.

ד.: אבל אני לא [צוחק]. אי אפשר לקבל 7 מ- 2, חבל על הזמן.

מ.: אי אפשר לקבל 7 מ- 2 כפול משהו?

ד.: אי אפשר, אי אפשר.

מ.: אם יש לך שבעה שקלים ואתה צריך לחלק אותם לשני ילדים, אתה לא יכול?

ד.: [מיידית] לא. אני יכול! יצא לי שלוש וחצי.

מ.: אה. אז יש מספר כזה. יש מספר.

ד.: שתיים כפול שלוש וחצי.

מ.: שתיים כפול שלוש וחצי זה 7. ועוד 1, זה 8, נכון?

ד.: כן.

מ.: אז כזה דבר אתה יודע לפתור.

ד.: [מפהק] כן.

מ.: עכשיו, אם זה היה עם x, זה מפריע לך שזה עם x ולא a? יש הבדל?

ד.: זה לא אותו דבר! זה לא אותו דבר!

מ.: זה לא אותו דבר.

ד.: בטח שלא. זה עם סוגריים, זה עם משוואות, זה בכלל לא אותו דבר. זה [התרגיל 2a+1=8] הרבה יותר פשוט.

מ.: זה הרבה יותר פשוט.

ד.: בטח.

<u>ניתוח קטע ו':</u> מתחילת הקטע עולה, כי דביר מכיר מצד אחד בעדיפותו של הייצוג באמצעות אותיות ["זה יותר קצר"], אך מצד שני מגלה התנגדות לייצוג זה בהיותו "לא שימושי" בחיים. לנושא של שימושיות *בתוך* בית הספר, במובן של קידום הידע המתמטי במטרה לעמוד בדרישות המערכת, דביר למעשה מסרב להתייחס. מתוך היכרותנו הקודמת אתו כפי שדווחה לעיל, נראה כי הצלחה בבחינת הבגרות במתמטיקה אינה נמצאת על סדר היום שלו. כבר ציינו, כי המקרה של דביר עשוי להיות דוגמא לתופעה של חוסר מוטיבציה הנובעת מהתנגשות עם המסלול האישי הצפוי על ידי התלמיד, תופעה שתועדה בקרב תלמידים בעלי הישגים נמוכים ובפרט כאלה מרקע סוציו-אקונומי נמוך (Chazan, 2000, Martin, 2000).

בהמשך הקטע מתברר עניין נוסף המתקשר להתנגדותו של דביר לסימן x. באופן אסוציאטיבי הוא קושר את האות a עם תרגילים פשוטים, המערבים בעיקר חיבור וחיסור, בעוד האות x קשורה עם משוואות מסובכות יותר הדורשות פתיחת סוגריים וכפל. אמירתו הנחרצת "זה לא אותו דבר!" ממחישה זאת היטב. ברם, למעשה אין הבדל רב בין ההתייחסויות השגויות של דביר לפעולות בשני הסמלים הללו. כאשר דביר מתבקש לפתור את המשוואה 2a+1=8, הוא טוען ש"שתיים a ועוד 1 זה שלוש a", בדומה למהלך שביצע ביחס למשוואה 2(3x+5), כאשר הציע לקחת את ה- x מתוך ה- 3x, לצרף אותו ל- 5 ולקבל 5x. אלה הם מהלכים אידיוסינקרטיים אשר נראה כי דביר מעלה אותם מתוך מצוקה כלשהי, כאשר משמעות הפעולות הללו אינה זמינה עבורו. (בהמשך נראה כי קיים קושי בתפיסת קשרים מסוג 2a, 3x וכדומה). כאשר המשמעות מוחזרת לדביר, הוא מסוגל לפתור את המשוואה. החזרת המשמעות מתרחשת בשני אופנים: ראשית, המעבר לייצוג בעזרת הריבועים והעיגולים ממחיש לדביר כי לא ניתן לחבר בין a-ים ומספרים. שנית, התרגום המילולי של המשוואה לנוסח "איזה מספר הכפלתי ב- 2, הוספתי 1 וקיבלתי 8?" משיב את דביר למקום מוכר (שהרי כבר פתר משוואות מילוליות רבות מסוג זה), ובאופן מיידי הוא

מתחיל לחפש אחר המספר שיעמוד בתנאי שמציבה המשוואה. אלא שאז הוא נתקל במכשול נוסף: "אי אפשר לקבל 7 מ- 2, חבל על הזמן". נקודה מעניינת במיוחד היא, שדביר אינו יכול לחשוב על מספר שאם נכפיל אותו ב- 2 יתקבל 7, אך ברגע ששאלה זו מתורגמת לשפה של חלוקת כספים, אין לו כל קושי לענות עליה. זוהי דוגמא יפה לטענתם של לייב וונג'ר (Lave & Wenger, 1990), כי ידע, ובכלל זה ידע מתמטי, נרכש תוך תלות חזקה בקונטקסט ובא לידי שימוש יעיל רק דרך משא ומתן על משמעותו בנסיבות ספציפיות.

ז. דביר פותר משוואות נוספות תוך חשיבה רפלקטיבית על הקשיים שלו.

בקטע הבא, האחרון בשיחה, הוצגו לדביר משוואות פשוטות כאשר הנעלם מיוצג על ידי x.

מ.: אוקיי, ואם אני אומרת לך כזה דבר [רושמת 3x=12]. איזה מספר...

ד.: [קוטע] 4.

מ.: יפה, איקס שווה 4, אז זה קל או קשה?

ד.: בסדר.

מ.: מה יותר קל, זה [2a+1=8] או זה [3x=12]? [דביר מצביע על השני]. 3x=12 יותר קל, למה יותר קל?

ד.: כי זה... אני לא ידעתי עד עכשיו שצריך לעשות שלוש כפול האיקס, וצריך שיצא לי 12.

מ.: ומה חשבת קודם כשראית כזה דבר [3x]?

ד.: חשבתי שלוש איקס, ולא שלוש כפול איקס.

מ.: אה, הבנתי. ואם אני אומרת כפול, אז זה יותר קל.

ד.: בטח. שלוש כפול x, ואז אני יודע מה לשים ב- x.

מ.: אוקיי, אז אם אני אעשה כזה דבר עכשיו [רושמת 10x = -10]. אתה יכול להגיד לי מה ה- x?

ד.: [לאחר מחשבה של מספר שניות] כן.

מ.: מה ה- x?

ד.: 10 כפול 20- שווה 10-.

מ.: [חוזרת על כך ורושמת זאת]. בוא נבדוק במחשבון, יאללה? [מבצעת את הפעולה במחשבון, דביר רואה שיוצא 200-].

ד.: אי אפשר לעשות פחות, נכון?

מ.: מה זאת אומרת?

ד.: אפשר לעשות חיסור.

מ.: אני רוצה לדעת 10 כפול מה יהיה -10. לא יודעת, אתה יכול לעשות את זה איך שאתה רוצה.

ד.: זה קשה, בגלל שזה פחות. זה מינוס 10, זה פחות מהאפס.

מ.: אוקיי, ואם זה היה [רושמת $10\cdot\square=10$] 10 כפול מה שווה 10. מה התשובה?

ד.: אפס.

מ.: 10 כפול אפס, בוא נבדוק [לוקחת את המחשבון].

ד.: לא, לא, לא, לא [צוחק] 10 כפול 1, 10 כפול 1 [מתגלגל מצחוק].

מ.: אה, 10 כפול 1.

ד.: [ממשיך לצחוק] "בוא נבדוק...".

מ.: אוקיי. [צוחקת] לא יודעת...אז [רושמת $10x=10$], עשר x שווה עשר, אתה אומר עשר כפול x שווה עשר, x חייב להיות 1. נכון. אבל אם 10 כפול x זה -10, אז מה ה- x יכול להיות?

ד.: לא הבנתי.

מ.: אתה אומר שאם $10x=10$, או כמו שאתה קורא את זה עכשיו, 10 כפול x שווה 10, איזה מספר כפול 10 שווה 10, המספר חייב להיות 1, אתה אמרת.

ד.: נו?

מ.: אבל אם אני רוצה ש- 10 פעמים, 10 כפול המספר יהיה -10, אז מה צריכה להיות התשובה לדעתך?

ד.: -1.

מ.: -1. אז $x=-1$. אז זה קשה או קל?

ד.: בסדר.

מ.: גם בסדר. אז אתה חושב...

ד.: [קוטע] אני לא יודע אם אני אזכור את זה.

מ.: תזכור את מה? [...] מה מכל מה שעשינו נראה לך קשה לזכור?

ד.: מה השעה?

מ.: [...] אז תגיד לי, מה מכל מה שעשינו עכשיו נראה לך קשה לזכור?

ד.: מה הכוונה?

מ.: אתה אומר אני לא יודע אם אני אזכור את זה עד השיעור, את מה שעשינו. מה ממה שעשינו לא תזכור? למשל את זה [כנראה הכוונה ל- $3x=12$] אתה לא צריך לזכור, אתה עשית את זה בלי עזרה.

ד.: את זה אני לא אזכור [כנראה הפתרון של $10x=-10$].

מ.: [...] אבל אתה תזכור למשל שאם רואים $4x$ הכוונה 4 כפול x?

ד.: [בביטחון] כן.

מ.: ותזכור למשל שאם אני אומרת [רושמת:] $8(x +2)$, ואני מבקשת ממך לפשט את זה, אז אתה יכול?

ד.: כן.

מ.: מה תהיה התשובה?

ד.: אני עושה [רושם] $8\cdot x +16$. עכשיו איך אני פותר?

מ.: אתה עדיין לא יכול לפתור, כי עדיין לא אמרתי למה זה שווה. אבל אם נגיד אני עכשיו אומר שזה שווה... ל- 40. מספר שהוספתי לו 2, כפלתי ב- 8 ואני אקבל 40. מה התשובה?

ד.: מה, זה קל.

מ.: אוקיי, מה התשובה?

ד.: אה... 10. לא.

מ.: [...] זאת אומרת אתה מחפש מספרים שאם נוסיף להם 2 ונכפול ב- 8 יהיה 40, נכון? כי זה השיטה שלך, ראיתי אותך עושה את זה.

ד.: כן.

מ.: אבל אני רוצה שנשתמש בזה שעכשיו אני כבר יודעים ש- $8(x+2)$ זה $8\cdot x+16$. נכון? אתה עשית את זה. נכון? אתה מסכים?

ד.: אני לא הבנתי, מה, מה, את מדברת מהר מדי.

מ.: אוקיי, סליחה. [...] $8(x+2)$ אתה אמרת לי זה 8 כפול x, שזה $8x$, ועוד 16. [...]

ד.: נו?

מ.: וזה שווה ל- 40. בסדר?

ד.: כן.

מ.: אז עכשיו אני שואלת שאלה אחרת - איזה מספר כפול 8 ועוד 16 יהיה 40.

ד.: אז למה כתבת פה ועוד 2? [מתייחס ל- $8(x+2)=40$]

מ.: כי אחר כך הכפלתי את זה גם ב- 8. זה וזה זה אותו דבר.

ד.: תעזבי, תני לי לחשוב. [...] [דביר עסוק בשאלה בשקט, ולבסוף אומר שהתשובה היא 3, ומסביר:] נו עשיתי, הלכתי עשיתי 8, 8 ועוד 8, [קטיעה בהקלטה; דביר מוסיף עוד 8, ומגיע ל- 24]. 24 ועוד 8, כמה קיבלנו - 32. 32 ועוד 16...

מ.: 32 ועוד 16? זה 48.

[למרות הטעות בזמן ההסבר, ככל הנראה המהלך המחשבתי של דביר היה להוסיף מספיק פעמים 8 עד שהגיע למספר שאם מוסיפים לו 16 מגיעים ל- 40, וכך הגיע ל- 3].

<u>ניתוח קטע ז׳:</u> בתחילת הקטע מתברר כי לדביר היה קושי בהבנת המשמעות של ביטוי כגון 3x. המשפטים הרפלקטיביים של דביר "אני לא ידעתי עד עכשיו שצריך לעשות שלוש כפול האיקס [...] חשבתי שלוש איקס, ולא שלוש כפול איקס", מעידים, כי מה שעשוי להיתפס בעיני המורה כמובן מאליו בשלב זה של הלימוד, יכול להוות מכשול לתלמיד, עבורו אין זה טריוויאלי כלל וכלל. גם אם המורים - כפי שסביר מאד להניח - מציינים בשלבים מוקדמים של הלימוד כי יש להתייחס לביטויים מסוג 5a, 7t, -2y כקיצורים לביטויי כפל (5·a, 7·t, -2·y), הרי שאם אין חזרה מתמדת על כך, אפשר לשער שתלמידים חלשים - אשר אחד הדברים המאפיינים אותם הוא קושי בזכירה - ישכחו את הפרשנות הזו, במיוחד כשמדובר ב"שפה חדשה". כדוגמא נזכיר את נ., תלמיד הקבצה ג׳ בכיתה ח׳ בבית ספר בו ביקרנו, אשר לא יכול היה להציב מספר בתבנית 5t, משום שלא ידע איזו פעולה יש לבצע. רק לאחר שהוצגו לו האפשרויות הבאות: 5+t-, 5-t-, 5:t-, 5·t-, נזכר שמדובר בכפל. הכתיבה של מספר מצד שמאל של המשתנה, ללא פעולת חשבון הרשומה ביניהם, עשויה להיות נתונה לפרשנויות אלטרנטיביות; בדו"ח קודם (הרכבי, 2000, עמ׳ 11), הבאנו ראיון עם פ., תלמיד כיתה ח׳ בהקבצה ג׳, אשר ניגש לפתרון המשוואה 4x - 3 = 9 כאילו במשוואה היה רשום 4 + x ולא 4x. פרשנות זו ומקורותיה מתועדים בספרות העוסקת בתפיסות שגויות באלגברה (Matz, 1980, Sleeman, 1984). פרשנות נוספת של ביטויים כמו 3x, 2y נעוצה בהגייה שלהם בשפה הטבעית - שני y, שלושה x, מה שנתפס כמְנִייה של אובייקטים[4] במקום כפעולת חשבון. החלפה של כפל במנייה עלולה להוות מחסום לפתרון נכון של תרגילים, כפי שמודגם באפיזודה הבאה, הלקוחה מתוך עבודה במסגרתה השיבו מבוגרים על שאלות במתמטיקה (קרסנטי, 2001, עמ׳ 221):

תמר, מורה (למקצוע הומני) בת 42, פותרת את המשוואה הבאה, שהרקע לכתיבתה הוא חישוב מע"מ אשר לא ניכנס כאן לפרטים לגביו.

---

[4] בספרות קיים תיעוד גם לתופעה זו (Rosnick & Clement, 1980, Kaput & Sims-Knight, 1983, Davis, 1984, Philipp, 1992). במחקרים אלה מדובר על תפיסת המשתנים לא כמייצגים של מספרים אלא ככינויי יחידות (labels).

$$y \cdot 17\% + y = 100$$

לאחר הכפלת שני האגפים ב- 100 מתקבלת המשוואה הבאה:

$$y \cdot 17 + 100y = 10000$$

לאחר מכן, במקום המהלך הצפוי של חיבור ה- y-ים ל- 117y, מבצעת תמר חלוקה ב- 17 בשני האגפים. כתוצאה מתקבלת באופן שגוי המשוואה הבאה:

$$y\ 100 + y = \frac{10000}{17}$$

המחובר 100y נותר ללא התייחסות, כלומר ללא שיחולק ב- 17. בעקבות שאלות המופנות לתמר, נחשפת התופעה הבאה: תמר יודעת לאן היא חותרת, וברור לה שעל מנת לפתור את המשוואה יש "לאחד את ה- y שיהיה y אחד", כלשונה. אלא, שהתבניות 100y ו- y ·17 אינן נתפסות אצלה כתבניות מאותו סוג שאפשר לצרפן. התבנית y ·17 היא תבנית כפל, אתה אפשר להתמודד באמצעות הפעולה ההפוכה – חילוק. (פרוצדורה זו היא אצל חלק מן התלמידים בבחינת "רפלקס מותנה" בפתרון משוואות, כפי שמשתקף בדבריה של תמר: "אם הוא כפול אז הוא מתחלק, לא? אם בצד אחד הוא כפול אז הוא לא צריך להיות בצד השני לחלק?"). לעומת זאת, התבנית 100y היא תבנית מנייה, כלומר סופרת "כמה y יש לנו". למרות שתבנית זו התקבלה כתוצאה מכפל בשורה קודמת, ניתן לשער כי משנכתבה על ידי תמר באופן זה, הפך ההקשר של מנייה לדומיננטי. כך אפשר להסביר את העובדה שלא בוצע חילוק ב- 17 על תבנית זו, שהרי אם אינה מתפרשת ככפל אין טעם להפעיל עליה את הפעולה ההפוכה. על פי אותו קו מחשבה, לא ניתן לצרף בין התבניות 100y ו- y ·17 עד שינותק הקשר בין ה- 17 וה- y. לאחר מכן יוותרו באגף שמאל המחוברים 100y + y שאותם אכן איחדה תמר בשלב הבא בפתרונה ל- 101y, מאחר ש- y לבדו הוא גם y אחד, כלומר יכול להצטרף לתבנית מנייה. פרשנות זו נשענת על הקטע המצוטט הבא, בו הבחינה תמר, בעזרת שאלות מדריכות, בבעיה:

מ.: ומה ההבדל בין הכפול הזה לכפול הזה?

ת.: [חושבת מספר שניות ואומרת בהפתעה] אה, זה 17y ?

מ.: נכון.

ת.: אהה.....

מ.: כלומר הגענו למסקנה ש- y ·17 זה 17y.

ת.: אה, נכון!

בעקבות התערבות זו שינתה תמר את הפתרון שלה ורשמה -

$$17y + 100y = 10000$$

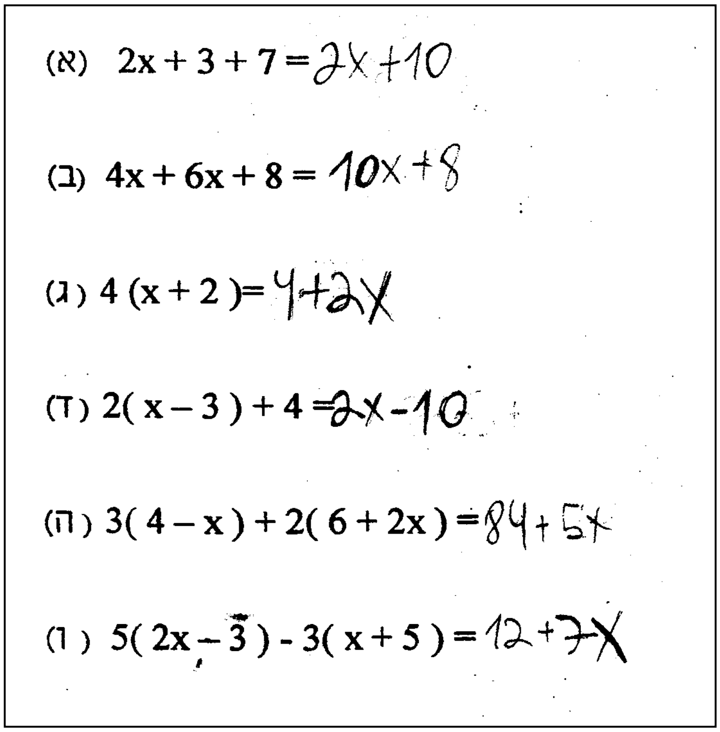
$117y = 10000$

ומשם המשיכה, כמקובל, בחלוקת שני האגפים ל- 117.

ובחזרה לדביר: מהמשך הקטע עולה, כי למרות שדביר מודע כעת לכך שיש לקרוא את הביטוי 3x כ"שלוש כפול x", בכל זאת הוא מתקשה ליישם מודעות זו בתרגילים נוספים. את המשוואה 10- = 10x הוא מציע לפתור באמצעות המשפט "10 כפול 20- שווה 10-". למעשה הפתרון הזה מתייחס לפעולת חיבור, שהרי 10 **ועוד** 20- שווה 10-, כלומר 10x נתפס עדיין כ- 10+x, למרות השימוש במילה "כפול" שבא, סביר להניח, כתוצאה מן ההבנה החדשה של דביר. במילים אחרות, השינוי בינתיים הוא שינוי סמנטי בלבד, וזהו אולי צעד ראשון בדרך לשינוי משמעותי יותר, אשר אינו מתרחש ב"מכת ברק" כי אם בהדרגה. דביר עצמו מבטא בראייה מטה-קוגניטיבית את ראשיתו של תהליך שינוי כאשר, לאחר שהוא נוכח שהפתרון שגוי, הוא שואל - "אי אפשר לעשות פחות, נכון?", כלומר הוא בודק עכשיו מה "מותר" ומה "אסור" לעשות. למרות הבדיקה הזו, אין לו הצעה אחרת, והוא מגיע למסקנה שהתרגיל קשה עבורו "בגלל שזה פחות. זה מינוס 10, זה פחות מהאפס". יתכן שמשתקף כאן גם גורם מסבך נוסף: הקושי הנובע מהמספר השלילי מערער את המשמעות החדשה של 10x וגורם לדביר לחפש משמעות הקשורה לפעולה אותה הוא **כן** יודע לבצע. כך אפשר להסביר את האמירה "אי אפשר לעשות פחות", במובן של "לחסר אני יודע אך כאן זה לא מה שרוצים ממני". שינוי המשוואה ל- 10= 10x מביא לתוצאה מעניינת. התשובה הספונטנית של דביר היא אפס, והרי זוהי שוב תוצאה של פעולת חיבור (10+0=10), אך תשובה זו מוחלפת מייד בתשובה הנכונה, 1, לאחר ששוב מוזכרת המילה "כפל". דביר גם צוחק למראה המראיינת הבודקת את תשובתו הראשונה. גם לצחוק הזה יש לדעתנו משמעות: דביר נעשה בהדרגה יותר ויותר מודע לכך שתשובותיו נלקחות ברצינות, שהוא לא יכול לזרוק סתם ניחושים מאחר שכל תשובה תיבדק תוך כדי הפעלת כפל והדגשת העובדה **שבוצע** כפל ולא רק **נאמר** כפל (אף על פי שאמירה זו היא חשובה, ואכן המראיינת חוזרת עליה כל הזמן במשפטים שונים - 10 כפול x, 10 כפול איזה מספר, 10 כפול מה ייתן את התוצאה, וכו'). כאשר חוזרים למשוואה המקורית, דביר כבר אינו מסתכן בזריקת ניחושים נוספים, ומעדיף לומר "לא הבנתי" ו"נו" (אולי כדי להרוויח זמן נוסף למחשבה?). מכל מקום, תשובתו הבאה היא כבר התשובה הנכונה. ראוי לציין, כי דביר מבצע מיוזמתו רפלקציה על כל התהליך הזה. הוא מודע היטב לקושי שלו לשנות את תפיסתו לגבי פתרון משוואות מסוג זה, ואומר - "אני לא יודע אם אני אזכור את זה". עם זאת, הוא סבור שיזכור את ההדרכה לבצע כפל כאשר הוא נתקל בביטוי כמו 4x או בפתיחת סוגריים מסוג $8(x+2)$, אותה הוא אכן מבצע כעת בקלות. בסיום הקטע דביר פותר את המשוואה $8\cdot x+16=40$ באופן

שהוא רגיל אליו - ניסוי וטעייה - אך הוא פועל באופן שיטתי: חיבור 8 לעצמו מספיק פעמים עד שיתקבל מספר, שאם נוסיף לו 16 נקבל 40.

בסיכומו של דבר, ניתן לראות שבקטע זה ישנן ראיות ללמידה המתרחשת במהלך הראיון. ניתן לעמוד על כך מתוך השוואת ההצעות המוקדמות יותר של דביר, לקחת את ה- x מתוך $2(3x+5)$, לצרף אותו ל- 5 ולקבל $5x$, או לצרף את שתיים a ועוד 1 לשלוש a, עם הפישוט המאוחר יותר, המופיע בקטע אחרון זה, $8(x+2)=8\cdot x+16$. אמנם, הידע החדש הוא "שביר" ודורש חיזוק, שאינו יכול להינתן במסגרת ראיון. במבחן שנערך בכיתה זמן קצר לאחר הראיון, ניתן להבחין כי דביר "מתנדנד" בין תפיסותיו הקודמות ובין הידע החדש שרכש ואשר עדיין אינו מגובש דיו. בתרשים 14 מופיע קטע מן המבחן.



תרשים 14

אפשר לראות כי בשני התרגילים הראשונים, שפעולת הפישוט בהם דורשת חיבור בלבד, אין לדביר בעיה (וגם קודם לראיון לא היתה בעיה כזו). מבין ארבעת התרגילים האחרים, הדורשים כפל ושימוש בחוק הפילוג, פתר דביר שניים באופן שהוא נכון מבחינת המקדם של x (התרגילים הרביעי והאחרון) אם כי אינו נכון מבחינת המספרים. את התרגיל השלישי פתר באופן המזכיר את שגיאתו מתחילת הראיון ($x+2$ הצטרפו ל- $2x$). התרגיל החמישי שונה מכל היתר, הן מבחינת נוסח התרגיל עצמו (x מופיע כמחובר השני בסוגריים ולא כמחובר הראשון כמו ביתר התרגילים), והן מבחינת הפתרון של דביר, אשר קשה

להבין את מהלך החשיבה המתבטא בו. כלומר, דביר לאחר הראיון נמצא בשלב התחלתי של תהליך שינוי.

סיכום אלמנטים מרכזיים העולים מניתוח המקרה של דביר.

לדעתנו, המקרה של דביר מגלם בתוכו היבטים רבים האופייניים לתלמידי הקבצות נמוכות במתמטיקה. ניתן לחלק מאפיינים אלה באופן גס לכאלה העלולים לנתב את התלמיד למסלול של כישלון, ולכאלה האוצרים בתוכם פוטנציאל להצלחה. אמנם, חלוקה זו היא פשטנית במקצת; השיחות שקיימנו עם דביר ממחישות עד כמה התנהגותו מורכבת. אולם, מאחר ששיחות אלו וניתוחיהן כבר נפרשו בפני הקורא, אנו מרשים לעצמנו בסיכום הדברים לבצע מעין "zoom out" ולהתבונן על המקרה במבט כולל יותר. להערכתנו, שימוש בנתונים ובניתוחים שהוצגו לצורך שרטוט "קווי מתאר" של כישלון והצלחה עשוי לקדם את הבנתנו לגבי הטיפול הנדרש בבעיות של תלמידים חלשים. בטבלה 1 מובאים אפוא האלמנטים המרכזיים העולים מתוך ניתוח השיחות עם דביר, כשהם מסווגים למרכיבים של כישלון והצלחה, ומודגמים במידת האפשר על ידי ציטוטים.

אפיונים העלולים להוביל לכישלון:	אפיונים המהווים פוטנציאל להצלחה:
• קושי להבין את תפקידם ומהותם של סמלים, ומתן עדיפות בולטת לעבודה קונקרטית עם מספרים. • דימוי עצמי נמוך ותחושה של חוסר ביטחון ביכולתה של המערכת לסייע לו ("אני לא מבין את זה, והיא לא מבינה"). • יכולת ריכוז נמוכה, קוצר רוח כלפי פרוצדורות ארוכות ("ווי, כל תרגיל לעשות ככה?"). • בסיס אריתמטי לא יציב. • תפיסה של כתיבה סימבולית כבלתי רלוונטית. ("מי משתמש, אף אחד לא משתמש בזה בחיים"). כתוצאה, חוסר מוטיבציה להשקיע ברכישת העקרונות של כתיבה כזו והרחבת הנתק בין שכל ישר למתמטיקה.	• מוכנות לקבל את העיסוק במספרים כעיסוק לגיטימי ואף מהנה ("אוהב לפתור תרגילים, זה עושה לי הרגשה טובה"), כל עוד נשמרת האוטונומיה שלו בבחירת שיטות עבודה בלתי פורמליות. • גילוי עניין במשימות מאתגרות. • מוכנות לקבל אסטרטגיות חדשות, בפרט אסטרטגיות ויזואליות, ויכולת להבחין ביתרונותיהן וחסרונותיהן. • מוכנות להשקעת זמן ומאמץ במטלות המושכות את תשומת לבו. • יכולת לאבחנה עצמית של נקודות קושי ("לא ידעתי עד עכשיו שצריך לעשות שלוש כפול האיקס", "אני לא יודע אם אני אזכור את זה").

טבלה 1

ניתן לראות כי חלק מן האפיונים בטבלה משותפים גם לאחד או יותר משלושת המרואיינים הקודמים בפרק זה. נתייחס לקווים המשותפים בסיכום שלהלן.

סיכום הממצאים העולים מתוך הראיונות האינדיווידואליים:

בפרק זה של הממצאים הבאנו קטעים מתוך ראיונות עם ארבעה תלמידים הלומדים בהקבצות נמוכות במתמטיקה: דן והגר, תלמידי כיתה ט׳, אורי ודביר, תלמידי כיתה ח׳. ניתוח המקרים האיר נקודות חוזק וחולשה שונות אצל תלמידים אלה. נציג כעת סיכום של התמונה הכללית המתקבלת מתוך עיון בארבעת המקרים.

באופן כללי ניתן לומר, כי ארבעת התלמידים מסוגלים להפעיל שיקולים המבוססים על שכל ישר על מנת להתמודד עם מטלות שונות. ברם, אצל כל אחד מן התלמידים קיימים מכשולים אשר התייחסות לא נכונה אליהם עלולה לחסום את הדרך להצלחה אפשרית במתמטיקה (הכוונה כאן למחסומים המתייחסים לתלמידים עצמם ולא לבעיות חיצוניות כגון מורים לא מתאימים, ספרי לימוד לא מתאימים וכדומה):

המחסום הראשון הוא המחסום האריתמטי. לא ניכנס כאן לבירור מכלול הסיבות אשר מביאות למצב בו תלמידים בחטיבת הביניים מתקשים בביצוע פעולות חשבון בסיסיות ובהבנה אלמנטרית של שברים. השאלה המטרידה בהקשר לכך היא, האם הכרחי לגזור ממצב זה את אי ההצלחה גם בתיכון וכתוצאה גם בבחינת הבגרות. לדעתנו, כפי שהבענו אותה בתוך רצף ניתוח המקרים, אפשר לעקוף מכשול זה על ידי תגבור מקביל של מיומנויות אריתמטיות ועל ידי השימוש במחשבון. הבעיה כפי שאנו רואים אותה, אינה חוסר השליטה של התלמידים בחשבון (גם אם חוסר זה אכן קיים בדרגות שונות), אלא שימת הדגש המרובה מצד המערכת על פערים אלה והפיכתם למוקד הקושי. אם המורה מאמין כי תלמיד שאינו יודע לכתוב רבע כשבר עשרוני לא יוכל גם לפתור שאלה בתכנון ליניארי או בסדרות, הרי שאכן האריתמטיקה הופכת למכשול בלתי עביר. בסופו של דבר, רבים מן המבוגרים משתמשים במחשבון לצורך חישוב פעולות בסיסיות ביותר, והדבר אינו מונע בעדם מלהפעיל חשיבה בהתמודדם עם מטלות כמותיות מסוגים שונים המזומנות להם בחייהם היומיומיים והמקצועיים.

המחסום השני, אשר אליו התייחסנו בהקשר למקרה של אורי, הוא מחסום השפה הכתובה. כפי שציינו, ישנם תלמידים אשר מסוגלים להביע בעל פה רעיונות מתמטיים, אך נתקלים בקושי רב משהם מנסים לרשום אותם בשפה הסימבולית המקובלת. אצל תלמידים אלה הבעיה של פורמליזציה מתחילה ברגע שהם נוטלים את העט לידיהם, ולא כאשר הם מנסים לתרגם ממילים לסמלים. מה שהם זקוקים לו הוא טיפוח של "השיח המתמטי היומיומי", כפי שמכנות זאת בן-יהודה ושותפותיה (Ben-Yehuda et al., In press, ראה בסקירת הספרות), אפילו אם הדבר יבוא תחילה על חשבון השיח המתמטי הפורמלי.

המחסום השלישי הוא מחסום העניין. מקובל לחשוב כי תלמידים חלשים במתמטיקה באופן טבעי שונאים את המקצוע, ועל כן הציפייה היא שיתרחקו מכל מה שיש לו קשר לנושא. המקרים של דן ושל דביר ממחישים כי ישנם תלמידים מהקבצות נמוכות המוכנים להשקיע זמן ומחשבה במטלות המושכות את תשומת לבם ומציבות להם אתגר כלשהו, תוך כדי שיחה אישית עם מבוגר המראה עניין במה שהם עושים. האופן בו ניתח דן את הגרפים הכלכליים שהוצגו לו, והמוטיבציה שגילה דביר בחיבור "טריק מספרים" משלו, מהווים הוכחות קיום לכך שתלמידים, גם חלשים, אוהבים לחשוב ועשויים לשאוב מכך סיפוק אינטלקטואלי, ולו בקנה מידה צנוע. תופעה זו חוזרת על עצמה בכיתות שביקרנו בהן. לא פעם ביקשו תלמידים מן המראיינת שישבה לידם דווקא תרגילים קשים. נביא דוגמא:

בכיתה ח' חלשה, שעסקה בדפי עבודה על פי התקדמות אישית, ישבה המראיינת עם אלי בנושא משוואות בהן הפתרון שלילי, והראתה לו כיצד אפשר להמחיש את הפתרון באמצעות ציר המספרים. תוך מספר דקות פתר אלי כמה תרגילים ברמת קושי עולה, שלא הופיעו בדף. רז, תלמיד שנחשב חלש במיוחד, ישב בסמוך. רז הפסיק את עבודתו והתעניין בנעשה. הוא ביקש לפתור גם הוא את התרגילים, ולאט לאט ככל שרמת הקושי עלתה נעשה יותר ויותר להוט לפתור. לבסוף ניתן לו התרגיל הבא: $4x+2=1$. תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה עבור התלמידים בשלב זה של ניחוש פתרונות, מאחר והפתרון הוא שבר שלילי. רז לא היה מוכן לעזוב את התרגיל עד שפתר אותו נכון. גם כשאמרה לו המראיינת שזהו תרגיל קשה ושתתן לו תרגיל אחר, לא הסכים והמשיך לנסות. בכל ניסיון בא והראה את הניחוש שלו. הוא ניסה -1, $-½$, ולבסוף הגיע ל- $-¼$, התשובה הנכונה. בהקשר זה ראוי לתת את הדעת על כך, שהצבת אתגר בפני תלמידים חלשים טעונה כיול מדויק של מידת הקושי; משימות קלות מדי או קשות מדי עלולות לחזק דימוי עצמי נמוך (קלות רבה מדי תעלה תחושות כמו - 'מה, זה כל מה שאתם חושבים שאני יודע לעשות?' וקושי רב מדי יביא למסקנה ש'אני לא יכול לעשות דברים כאלה'). כמו כן ראוי לציין שהמקור הראשוני להתעניינותו של רז היה העובדה כי חברו אלי הצליח לפתור את התרגילים. נחזור לתופעה זו בפרק 4, העוסק באינטראקציות בין תלמידים.

הראיונות והדוגמאות שהובאו בפרק זה מעלים אפוא כי אפשרי למצוא אצל תלמידים חלשים גם נקודות חוזק פוטנציאליות. נשאלת השאלה, כיצד עשויה המודעות לכך להשפיע על התנהגותם של מורים בהקבצות נמוכות. בפרק 5 נבדוק שאלה זו על ידי התמקדות בסיטואציות כיתתיות.

4. ניתוח אינטראקציות בין תלמידים.

בפרק הקודם עמדנו על יכולות וקשיים של תלמידים בודדים. בפרק זה ננסה לאפיין תלמידים מתקשים מתוך התבוננות באינטראקציות בינם לבין עצמם, כאשר במוקד נמצאת אותה מטרה של איתור היכולות אותן ניתן לרתום כבסיס לקידום התלמידים. הרצון לבחון אינטראקציות בין תלמידים נובע מהכרה בחשיבות שיש לאלמנטים חברתיים כגון תחרות, הידברות, השפעה הדדית ועוד, על הלמידה, כפי שמדגישות זאת תיאוריות של למידה כתהליך חברתי וכצורה של שיח (ראה למשל Sfard, 2001).

להלן נביא מספר דוגמאות של אינטראקציות בין זוגות או שלשות של תלמידים, בהן צפינו במסגרת ביקורינו בשיעורי מתמטיקה בהקבצות נמוכות. נבחן את השאלה על איזה רקע עשויה להתפתח אינטראקציה התורמת במובן כלשהו לתלמידים וננסה להבין אלו תנאים דרושים על מנת לעודד אינטראקציה כזו.

בסעיף 4.1 נדגים בקצרה סוגים שונים של אינטראקציות אפשריות. בסעיף 4.2 נתרכז בסיטואציה אחת בה תלמיד מסביר לשתי חברותיו לכיתה את הטעות שעשתה אחת מהן בעבודתה.

4.1. סוגים שונים של אינטראקציות.

אינטראקציות בין תלמידים, במובן של תקשורת מילולית מכל סוג המתקיימת בין שני תלמידים או יותר, הן דבר שכיח בכיתה. בפרט הדבר שכיח בכיתות של תלמידים חלשים בהקבצות נמוכות, אשר אחד מן המאפיינים שלהם הוא חוסר יכולת להתרכז לזמן ממושך. אם המורה מקדיש/ה זמן ניכר להרצאה או להסברים פרונטליים של החומר ותרגול על הלוח, ישנה סבירות גבוהה שלאחר זמן קצר יימצא תלמיד אחד או יותר שיפרו את ההקשבה הכיתתית על ידי הערות (שבדרך כלל אינן קשורות לחומר), וייצרו חילופי דברים בכיתה. התלמידים ידברו בקול רם עם שכניהם לשולחן או שתלמיד אחד ייקח על עצמו את תפקיד ה"ליצן" וירכז סביבו את תשומת לב חבריו. ניסיונות להשליט משמעת במצב כזה, המתואר בדרך כלל כ"חוסר משמעת" או אפילו כ"איבוד שליטה על הכיתה", לעתים קרובות אינם עולים יפה, משום שהתלמידים מיצו את יכולתם להתרכז תוך שתיקה. אחד הפתרונות למצב זה הוא למעט בהוראה ריכוזית. באוגדן למורי המתמטיקה בכיתה ח', המיועד בעיקר לתלמידים מתקשים (בוהדנה והדס, 2002), מומלץ לפתוח ולסכם את השיעור באופן פרונטלי (מוגבל לזמן קצר), ולהקדיש את מירב הזמן לעבודה עצמית או עבודה בקבוצות, כאשר המורה מסתובב בין התלמידים ומעניק כמה שיותר תשומת לב אישית. בצורת עבודה זו יש לתלמידים אפשרות לדבר זה עם זה באופן "חוקי", ויש יותר סיכוי שהאינטראקציות יעסקו (גם) בנושאים המתמטיים הנדונים. אמנם, יש סיטואציות בהן

האינטראקציה עלולה להיות מכשול ללמידה, למשל במקרה של שתי תלמידות בהן צפינו בכיתה ח׳ ברמה ג׳: התלמידות היו שתיהן חלשות מאד והתקשו לבצע פעולות אלמנטריות. במהלך כל עבודה עצמית שניתנה בכיתה, כל אחת מהן שאבה עידוד, או שמא נחמה, מכך שגם חברתה מתקשה כמוה, ולא התאמצה לשנות מצב זה. לפיכך, במקום דרבון ללמידה, האינטראקציה ביניהן נתנה לגיטימציה לאי-למידה. ברם, צפינו גם בלא מעט סיטואציות בהן האינטראקציות שימשו לקידום הלמידה. דבר זה התרחש כאשר המצב בין התלמידים היה אחד מן הבאים:

א. זוג תלמידים היושבים יחד כשהדומיננטי מביניהם מעורב בלמידה והשני מחקה אותו.

לדוגמא: אלי ורונן הם תלמידים בכיתה ח׳, בהקבצה חלשה. הם יושבים יחד באופן קבוע בשיעורי מתמטיקה. בביקורינו בכיתה התרשמנו, כי קיימת ביניהם מערכת יחסים של ״משפיע״ ו״מושפע״. במילים אחרות, כאשר אלי פועל באופן כלשהו בתוך הכיתה, על פי רוב יבחר רונן לפעול באופן דומה. לכן, כאשר המורה מצליחה לגרום לכך שאלי יתרכז ויעבוד בדף העבודה, גם רונן יהיה מעורב בעבודה זו.

ב. תלמיד המגלה עניין במטלה מסוימת תוך כדי עבודה עצמית ומעורר בכך את סקרנותו של תלמיד אחר.

דוגמא למצב זה תוארה לעיל בעמ׳ 75, כאשר רז, תלמיד בכיתתם של אלי ורונן היושב בסמוך להם, הבחין כי אלי מצליח לפתור משוואות בשיטה מסוימת שהוסברה לו על ידי המראיינת. רז עמד על כך שגם הוא מעוניין להכיר את השיטה ואכן לאחר מכן פתר מספר תרגילים בהצלחה.

ג. תחרותיות בין שני תלמידים.

דוגמא - תחרותיות בונה בין דביר ואורי: דביר ואורי הם תלמידי כיתה ח׳ הלומדים בהקבצה נמוכה במתמטיקה. (ראה סעיפים 3.3, 3.4 בפרק 3). נציג כעת בקצרה אירוע שהתרחש ביניהם באחד מביקורינו בכיתתם.
דביר ניסה לשכנע את המראיינת שביקרה בכיתתו כי הוא יכול לפתור כל משוואה מילולית ללא שימוש ב- x, בעזרת ניחוש וטעייה בלבד. (ראה עמ׳ 48 לעיל). במסגרת מאמציו להוכיח זאת, מול מטרתה של המראיינת לשכנעו כי ישנם תרגילים שיקשה עליו לנחש את פתרונם, קיבל את התרגיל הבא:

לקחתי מספר, כפלתי אותו בעצמו, הוספתי 100, ואז קיבלתי את המספר שלקחתי, כפול 20. מה המספר?

דביר ניסה לפתור את התרגיל במשך דקות ארוכות. על ידי ניחוש. באותו זמן, קיבל אורי תרגיל אחר (ראה עמ׳ 44 לעיל):

לקחתי מספר וכפלתי אותו ב- 3. הורדתי 16 וקיבלתי בחזרה את המספר. מה המספר?

אורי, כאמור בסעיף 3.3, פתר את התרגיל במהירות, והביע (בקול) שביעות רצון רבה מכך שפתר את התרגיל בעוד דביר לא פתר את התרגיל שלו. כתגובה, דביר התרגז וטען שהתרגיל שלו הרבה יותר קשה (זאת מבלי לראות את התרגיל של אורי). שניהם פנו למראיינת לבירור דרגת הקושי, והיא אישרה שאכן התרגיל של דביר קשה יותר. אז אמר דביר לאורי - "נראה אותך פותר את זה!", דברים אלה פעלו את פעולתם והכניסו את אורי למצב של אתגר. הוא חשב, ניחש תחילה 5, בדק ומצא שזה לא נכון. לאחר מכן ניחש 10, בדק ומצא כי תשובה זו נכונה. מרוצה, צעק "פתרתי!". מיד עבר דביר לשבת לידו, ואורי הסביר לו את הפתרון. עוד לפני שסיים אורי את דבריו דביר כבר חישב בעצמו וביטא בקול רם הכרה בכך שאכן אורי פתר נכון. לאחר מכן אורי היה כל כך מרוצה עד שפתר ברצון תרגיל נוסף, והסכים לעבוד על תרגילים נוספים שהמראיינת הכינה עבורו בדף מיוחד משלו. דביר, כתגובה, ביקש אף הוא דף מיוחד עבורו. נוסיף עוד כי כאשר לאחר מספר שבועות הוזמן דביר לראיון מחוץ לכיתה, ביקש אורי שיראיינו גם אותו.

סיטואציה קצרצרה זו ממחישה כי תחרות בין שני תלמידים עשויה להיות חיובית כגורם מעלה מוטיבציה. נקודה חשובה היא, כי תחרותיות בונה יכולה להתקיים רק בתנאי שהתלמידים מייחסים ערך כלשהו להצלחה בתחרות זו, כלומר רואים יתרון למי שמפגין הבנה מתמטית טובה יותר. דבר זה אינו מובן מאליו כלל וכלל. בספרו של דני מרטין (Martin, 2000, ראה בסקירת הספרות) על למידת מתמטיקה בקרב אוכלוסיות אפרו-אמריקניות בארה"ב, מתוארות סיטואציות בהן להצלחה במתמטיקה (ולפעמים ללימודים בכלל) מוצמדת תווית של חסרון מבחינה חברתית, היות וזו "התנהגות של לבנים". באופן דומה, עשויות בנות להצמיד תווית של חיסרון לחברותיהן המצליחות במתמטיקה, משום שהן מזוהות הצלחה כזו עם "גבריות", כמודגם בקטע הבא, הלקוח ממחקר על זיכרון של מבוגרים לגבי המתמטיקה שלמדו בעבר (קרסנטי, 2001, עמ' 92):

"היו כמה בנות שהיו מבריקות במתמטיקה. זה היה מאד יוצא דופן בשכבה. והן היו מכוערות במיוחד, עם הצלחה חברתית מאד מעטה, ממש זה כאילו הלך ביחד. [...] הן היו מאד מבודדות, ו... אני זוכרת, זאת אומרת כל הסיפור של מתמטיקה זה היה לעבור את זה [...] זה היה הקטע של הבנים".

אין בידינו ממצאים כמותיים לגבי תוויות חברתיות המוצמדות להצלחה במתמטיקה בקרב תלמידים בהקבצות נמוכות, ולכן דברינו הבאים הם בגדר השערה בלבד. מביקורינו בכיתות התרשמנו כי, לעומת ממצאיו של מרטין, תלמידים חלשים מייחסים ערך חיובי להצלחה במתמטיקה. אמנם, תופעה נפוצה מאד היא ייאוש של התלמידים מעצמם, השלמה עם כך שאינם טובים במתמטיקה וכתוצאה אדישות למתרחש בכיתה, אך לא נתקלנו בתופעות של

"הנמכה" חברתית כלפי עמיתים לכיתה שכן מצליחים בתרגיל כלשהו. ההפך נראה מסתבר יותר. יתכן - ושוב, על דבר זה להיאמר בזהירות הראויה - שקיימים הבדלים משמעותיים בין "תרבות ההצלחה" של המיעוט האפרו-אמריקני בארה"ב ובין זו של תלמידים ישראלים-יהודים, שאינם קבוצת מיעוט וניזונים ממורשת ארוכת שנים של "החינוך מעל הכל", אשר גם אם היא מצטמצמת לעתים לכדי סיסמאות בלבד, כנראה היא משדרת שכישלון בלימודים אינו דבר להתגאות בו.

ברם, לגיטימציה חברתית אינה תנאי מספיק לכך שתתרחש תחרות בונה. על מנת שתלמיד ירצה בהתמודדות, עליו לחוש ביטחון ביכולתו לעשות זאת. מבחינה זו, יש חשיבות עליונה ל"פריצות דרך", קטנות ככל שיהיו, של הבנה. ברגע שנפתח פתח להבנה, התלמיד עשוי להיות מעוניין יותר להראות לחבריו שהוא יודע על מה הוא מדבר. נראה דוגמא לכך בסעיף 4.2 להלן.

4.2. אינטראקציה התורמת לשכלול ההסבר המתמטי: המקרה של נעם, ירדן ונאוה.

נעם, ירדן ונאוה הם תלמידים בכיתת י' מב"ר, הלומדת על פי תכנית ש"י שפותחה בקבוצת המתמטיקה במכון ויצמן. ביקרנו בכיתתם בעת שעסקו בנושא מציאת אמצע של קטע שקצותיו נתונים, במסגרת שיעורי גיאומטריה אנליטית. תחילה נציג בקצרה את הרקע המתמטי לנושא, על הבעייתיות שעלולה להיות כרוכה בו:
במהלך העיסוק בגיאומטריה אנליטית, מתוודעים התלמידים לשתי פרוצדורות שונות בהן מעורבים ערכיהן של שתי נקודות נתונות, שמקובל לסמנן (x_1,y_1) , (x_2,y_2). הפרוצדורה האחת היא מציאת שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות. הנושא של שיפועי ישרים הוא נושא מרכזי בתחומים רבים במתמטיקה, ומושם עליו דגש רב בגיאומטריה אנליטית ובאנליזה. על פי רוב לומדים התלמידים את הנוסחה הבאה עבור השיפוע:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

הפעלת נוסחה זו על שיעורים של נקודות נתונות אינה משקפת את משמעות השיפוע והיא מקור לטעויות מסוגים שונים, הנובעות מעומס הפעולות שעל התלמידים לזכור. ראשית, יש לזהות או לשיים את (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2). עצם השימוש באינדקס תחתי הוא משהו שקשה לתלמידים לעמוד על משמעותו או על הצורך בו, וזהו אחד הדברים הראשונים שמרחיקים אותם מן המובן של פעולותיהם. שנית, יש לשמור על הסדר בחיסור ושלישית יש לזכור את מי מחלקים במי. כל זאת בהנחה שאין לתלמידים טעויות בחיסור מספרים שליליים.

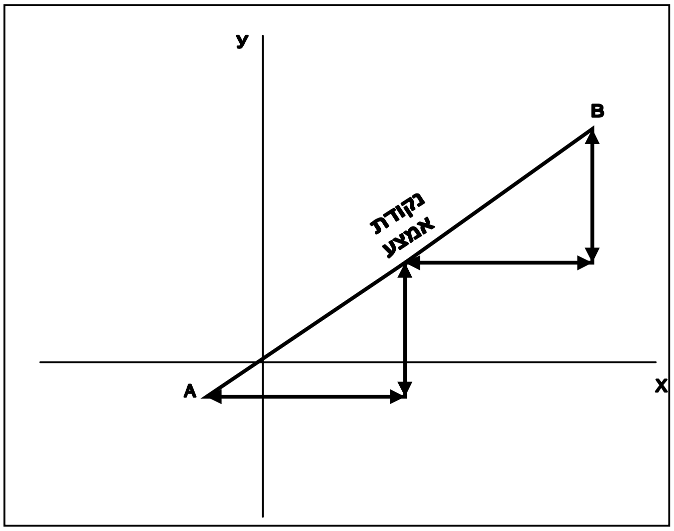
הפרוצדורה השניה היא מציאת אמצע הקטע שקצותיו הם שתי הנקודות הנתונות. בבואם ללמוד את הנושא, נתקלים התלמידים בנוסחה הבאה למציאת שיעורי נקודת האמצע:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

מיותר לציין, שכאשר הלימוד מתרכז בנוסחאות ש"אוטמות" את המשמעות ואשר אינן מלוות בשרטוט ובביקורת של שכל ישר, הסיכוי הן לטעות והן לחוסר עניין גובר. לימוד שכולו סימבולי מבוסס על פי רוב על העמסת הזיכרון כמעט ללא יכולת לבדיקה עצמית משמעותית. כאשר ניגשים התלמידים לפתור שאלה, רבים תוהים ובין השאר עלולים לשאול את עצמם: מה צריך לעשות כאן, לחבר את השיעורים או לחסר אותם? תלמידים רבים אף לא יבחינו ששיפוע הוא ערך מספרי אחד ואילו מציאת אמצע קטע כרוכה בחישוב של שני ערכים - שני השיעורים של נקודת האמצע.

במקרה שלפנינו, נראה כי מהלך הלימוד בתכנית ש"י מבוסס על המשמעות של אמצע קטע. משמעות זו באה לידי ביטוי בשיח בין התלמידים, והיא הבסיס למציאת פתרון נכון ולבדיקת טעויות באופן עצמאי. מעניין לציין כי המשמעות הולכת ומתבהרת ככל שנעם ממשיך ומסביר את טענתו; הצורך להראות את נכונות פתרונו דוחף להסברים המשתכללים ככל שנעם מנסה שוב ושוב להצדיק את הפתרון.

הרקע: התלמידים למדו כיצד מוצאים אמצע של קטע שקצותיו נתונים. הדגש בהסבריה של המורה ניתן לא על הנוסחה כי אם על הגרף. הנקודות משורטטות ונבנית "המדרגה" ביניהן. נקודת האמצע מוצגת כנקודה שבה אפשר לחלק את המדרגה לשתי מדרגות שוות, כמתואר סכמטית בתרשים 15.



תרשים 15

ערך x של הנקודה הוא זה הנמצא במרחק שווה מערכי x של נקודות הקצה, וכנ"ל לגבי y. מהלך כזה מקטין טעויות חישוב עם מספרים שליליים ומהווה לא רק דרך לפתרון אלא גם דרך לביקורת על נכונות הפתרון.

התרגיל הראשון בו עבדו התלמידים בעבודה עצמית היה מציאת אמצע הקטע שקצותיו הם (6,1), (-4,7). נעם, שפתר את התרגיל לבד והגיע לתשובה (1,4), שמע את ירדן ונאוה, שעבדו יחד, אומרות בקול רם את התשובה שלהן, (5,4). הוא הזיז את הכסא שלו לעברן והשלושה פתחו בויכוח מהי התשובה הנכונה, (5,4) או (1,4). במהלך הויכוח ירדן השתכנעה בצדקתו של נעם אך נאוה התעקשה על הפתרון שלה. אז קראו השלושה למורה כדי שתכריע ביניהם. להלן תמליל השיחה לאחר הצטרפות המורה:

ירדן: את טועה, אחד, ארבע. הנה, טעית, נאוה, זה קורה, את אנושית, את טעית.

מורה: כן, אבל את יכולה להגדיר מה הטעות?

נעם: שהיא ספרה... היא לא ספרה מכאן [כנראה מצביע על -4], היא ספרה מכאן [כנראה מצביע על אפס].היא חושבת שעשר מ... , שהעשר מאפס לעשר, זה לא, היא לא הבינה שזה לא מארב... ממינוס ארבע לעשר, לכאילו, לא משנה.

מורה: לא, אני רוצה... אני מבינה מה שאתה אומר. מה הטעות שלה?

נעם: היא ספרה, היא ספרה עשר, אבל היא לא ספרה את העשר כאילו מהאפס, היא ספרה אותם כאילו מהמינוס ארבע וממינוס ארבע הגיעה לשש ואז ביחד זה עשר ואז היא צריכה להוריד את הארבע ואז היא מגיעה... [מדבר מהר מאד, שלושת התלמידים צוחקים].

מורה: אז אני יכולה להגיד לך שחלק מהדברים שאמרת הם נכונים.

נעם: הכל נכון!

[המורה מנסה להתחיל להסביר אך נעם לוקח שוב את רשות הדיבור:]

נעם: היא הלכה ממינוס ארבע לשש, זה עשר. אבל אם היא רוצה לעשות את האמצע שלהם אז זה אחד, כי את עושה את הארבע ועוד אחד זה חמש, ואז נשאר לך עוד חמש ללכת ואת מגיעה לעשר.

<u>ניתוח הקטע:</u>

גם כאן לפנינו דוגמא לסיטואציה של תחרות, שגרמה למעורבות רבה של התלמידים. לתחרות זאת היו גם צדדים פחות נעימים; תוך כדי הויכוח, אשר רק חלקו מצוטט בקטע, חזר נעם וקרא לעצמו "הגאון", ואת נאוה כינה בכינויי גנאי כגון "מטומטמת". הן נעם והן ירדן רצו מאד להוכיח שנאוה, שהיא התלמידה החזקה במתמטיקה מבין שלושתם, טעתה

הפעם. מונעים על ידי רצון חזק לנצח בתחרות, קראו למורה, מן הסתם כדי שזו תאשר את "ניצחונם". התנהגותה של המורה מרגע זה ואילך היא זו שלמעשה גרמה לאינטראקציה בין התלמידים להיות משמעותית. בכיתה מסורתית, המורה בדרך כלל נוטל על עצמו את תפקיד השופט, ובנקודה זו סביר להניח שמורים רבים היו מספקים הסבר לשלושת התלמידים. ההסבר הוא בדרך כלל תמוך נוסחה, שהיא המקור לתיקון ולקבלת התשובה הנכונה. במקרה זה, ישנם מורים שהיו חוזרים על התהליך הסימבולי ומראים לתלמידים כי הטעות של נאוה יכולה היתה לנבוע מחישוב מוטעה, $6+(-4) =10$ במקום $6+(-4) =2$, או מכך שבוצע חיסור $6-(-4)$ במקום חיבור $6+(-4)$. במקום זאת, המורה מחזירה את השאלה מהו מקור השגיאה בחזרה אל התלמידים. הדיון מוסט מן השאלה "מי צדק ומי לא", לשאלה היכן הטעות. המורה אינה מתגמלת את התלמידים על בסיס נכונות, ואינה מתערבת במשחקי הכוח המרומזים כאן. תחת זאת היא שמה את הדגש על בדיקת התשובות. במהלך הדיון היא מחזירה את נאוה אל השרטוט ואז נאוה רואה שהנקודה (5,4) שהציעה כפתרון, כלל אינה נמצאת על הקטע המחבר בין הנקודות הנתונות. ברם, הנקודה המעניינת ביותר בדיון, לדעתנו, היא התפתחות ההסברים של נעם. מלכתחילה נעם אינו מנחית נוסחה להצדקת נכונות דבריו אלא נשען על משמעות ושכל ישר. הוא מראה על הגרעין הנכון בתשובה של נאוה, ומצביע על מקור היישום הלא נכון. השאלה "האם לחבר או לחסר" כלל אינה נשאלת כאן, כמו גם האם החישוב נכון או לא. ברור לשלושת התלמידים כי המרחק בין שיעורי ה- x של הנקודות הוא 10 וחציו 5, אך נעם מנסה להראות, בשכנוע גובר והולך, כי ה- 5 הזה איננו שיעור ה- x של נקודת האמצע אלא יש "להוסיף אותו" לשיעור ה- x ההתחלתי. בתחילה ההסבר של נעם עילג והוא מוותר על הניסיון, אך בעידוד המורה הוא ממשיך ולבסוף אף "לוקח את המיקרופון" מהמורה ונותן הסבר רהוט, שנשען באופן מפורש על תמונה מנטלית ויזואלית ("את עושה את הארבע ועוד אחד זה חמש, ואז נשאר לך עוד חמש ללכת ואת מגיעה לעשר"). ניכר כי נעם קלט היטב כי התשובה 10 היא בעלת משמעות, והוא מסוגל להסביר מה השתבש בתשובה בהמשך. במלים אחרות, נעם לא רק הסביר את פתרונו אלא היה מסוגל להצביע על טעותה של נאוה. האינטראקציה אפשרה לנעם לשכלל את הבנתו תוך כדי ניסיונותיו להציע הסברים שהתנסחותם הולכת ומשתפרת.

לסיכום: הוראה המשתמשת בהמחשות ויזואליות ומאפשרת בניית משמעות, בדיקה עצמית ודיון, הוראה השמה דגש על הסבר מקור השגיאה במקום תגמול על נכונות, כאשר הסמכות לשכנוע מוחזרת לידי התלמידים ואינה נובעת מהישענות חזקה על נוסחאות, הוראה כזו מאפשרת זירת התרחשות שבה אינטראקציות מהסוג שתואר לעיל עשויות להתפתח ולתרום ללמידה.

5. ניתוח סיטואציות כיתתיות: אינטראקציות מורה-תלמידים.

בפרקי הממצאים הקודמים התייחסנו לראיונות עם תלמידים בודדים ולניתוח אינטראקציות בין זוגות או שלשות של תלמידים. בפרק זה נרחיב את נקודת ההתייחסות לכיתה שלמה. נציג סיטואציות שאירעו במהלך הטבעי של שיעורים בכיתות חלשות וננתח את המתרחש בכיתה[5], בהתייחס לשני סוגי אינטראקציות:

א. דיאלוג בין מורה ותלמיד או תלמידה תוך כדי השיעור. במובן מסוים הדינמיקה באינטראקציה כזו דומה לדינמיקה של ראיונות אישיים, כפי שהופיעו בפרק השלישי של דו"ח זה. ברם, ההבדל הוא בכך שמדובר במורה ולא במראיין-חוקר שבא מחוץ למסגרת, כלומר הסיטואציה היא אותנטית. הבדל נוסף הוא שדיאלוג המתנהל בכיתה בין מורה ותלמיד בקול רם, חשוף להקשבתם של תלמידים נוספים, שותפים פסיביים שנוכחותם עשויה להשפיע על הנאמר.

ב. דיון המונחה על ידי המורה בהשתתפות אקטיבית של מספר משמעותי של תלמידים.

הדגש בניתוחים מושם על השאלה כיצד התנהגות המורה, בשילוב חומרי הלמידה, תורמים ליצירת אווירת כיתה שבה מתרחשת למידה משמעותית. כמו כן נראה כיצד באים לידי ביטוי בהוראה חלק מרעיונותיו של חזן (Chazan, 2000) שהוצגו בסקירת הספרות של דו"ח זה.

5.1. שיעור בנושא מבוא לאי- שוויונים בכיתה ח'.

הכיתה בה התקיים השיעור היא כיתה ח', רמה ג', בחטיבת ביניים עירונית. בכיתה זו ניסינו לבדוק גישה ללימוד ראשוני של מושג האי-שוויון והדרכים לייצג אותו. השיעור עוצב ברוח גישת "המתמטיקה המציאותית" (Realistic Mathematics) שפותחה בהולנד (ראה Gravemaeijer, 1998).

נתאר להלן את רצף השיעור, תוך הסבת תשומת הלב לנקודות חשובות באופי ההוראה במקומות המתאימים.

הפעילות ההתחלתית סבבה סביב תמונה שהוצגה לתלמידים, המתארת רכב לקראת כניסתו למנהרה, ובה תלוי שלט שעליו רשום "2.90" (ראה תרשים 16). התלמידים התבקשו לפרש את כוונת השלט. התקבלו מספר אלטרנטיבות לפירוש, כמו: המספר מתאר את המשקל המותר לכלי הרכב, רוחבו, רוחב הכביש, גובה כלי הרכב. עבור כל הצעה דנו התלמידים ביחידות המתאימות.

---

[5] חלק מן התצפיות והניתוחים הופיעו בדו"ח קודם (קרסנטי והרכבי, 2001).

תרשים 16

לאחר שהתלמידים הסכימו כי המספר 2.90 מציין גובה מקסימלי אפשרי של כלי הרכב, כך שיוכל להיכנס למנהרה, הציעו חלק מן התלמידים לאמוד את גובהם של כלי רכב שונים, בפרט משאיות, כדי לבדוק האם יוכלו לעבור דרך המנהרה. המורה ביקשה מן התלמידים לתת דוגמאות של גבהים שיאפשרו מעבר במנהרה וגבהים שלא יאפשרו זאת, במטרה להדגיש באופן מפורש שמדובר בטווח של מספרים. הדיון היה תוסס וחלק ממנו נסב על גבהים קרובים מאד ל- 2.90. ברגע מסוים הציע אחד התלמידים: כל הגבהים שקטנים מ-2.90. המורה ניצלה מיד את ההצעה ושאלה: האם תוכלו לרשום זאת בצורה מתמטית? מכיוון שלתלמידים היתה היכרות מוקדמת כלשהי עם סימונים אלגבריים, הציע אחד התלמידים לכתוב $x<2.90$. המורה שאלה - "מה מייצג ה- x?" והתלמידים ענו "הגובה". אז שאלה המורה האם ישנה דרך אחרת לבטא זאת בצורה מתמטית. כוונת המורה היתה לייצוג מסוג אחר, ציר המספרים למשל, אך ההצעה שהתקבלה מאחת התלמידות היתה $a<2.90$. עבורנו, $x<$ ו- $a<$ הם אותו סוג של ייצוג, והעובדה שהאות היא שונה אינה רלוונטית. עבור התלמידים, אלה הן שתי דרכים שונות לביטוי אותו רעיון, ואכן אין כל סיבה מדוע תלמידים שאינם בקיאים בהרגלים מתמטיים או בדרכי ייצוג שונות, יחשבו אחרת. לשאלה, איזו התערבות מורה תיחשב בסיטואציה כזו להתערבות מוצלחת, אין לדעתנו תשובה ברורה וחד-משמעית. יתכן שמוטב למורה לבטא לא יותר מאשר הסכמה, ובעקבותיה בקשה לדרכי ייצוג נוספות. אנו מעריכים, כי "הרצאה" על כך ששימוש ב- x או ב- a הוא במהותו שימוש באותו ייצוג, לא תתאים כאן. הרצאות הבהרה מסוג זה אינן

נדירות בקרב רבים מאתנו, למרות שבאופן לא מודע הן עלולות להגביר את הניכור וחוסר הסבלנות מצד התלמידים החלשים. מורים רבים רואים צורך "לסגור" סוגיות בתוך שיעור, מתוך תחושה של חוסר הגינות בהשארת דברים פתוחים ו"תלויים באוויר". ההרצאות, גם אם הן קצרות, באות אפוא להסיר את מה שנראה להם כאי-בהירויות. הדבר מבטא מידה מסוימת של קוצר רוח שעלול להזין את חוסר הסבלנות של התלמידים, ולגרום לחיזוק התחושה כי ללא סיכום מתקן מיידי של המורה הם לעולם לא ילמדו בכוחות עצמם.

ובחזרה לשיעור שלנו: מאחר שהתלמידים לא הצליחו להציע דרך נוספת בעצמם, אך המורה ידעה כי ציר המספרים מוכר להם, היא הציעה אותו בעצמה. התלמידים סימנו על הציר את האפס ואת 2.90, והדגישו את הקטע המציין את כל המספרים ביניהם. המורה שאלה האם לדעתם $x<2.90$ והקטע המסומן על הציר "אומרים אותו דבר". סוג כזה של שאלה מהווה הדרכה רצויה לאור הנקודות שהזכרנו לעיל. מצד אחד, התערבות זו מאפשרת דיון מפורש על מתמטיקה כשפה שבה ניתן לבטא רעיונות, ומצד שני היא מעניקה לתלמידים הזדמנות לבטא כיצד הם רואים ומתייחסים לסמלים לעומת ייצוגים אחרים. שיח מֶטָה-מתמטי כזה אפשרי כבר בשלבים מוקדמים כמו זה המתואר, ואם משתמשים בו בעיתוי הנכון הוא עשוי לתמוך בפיתוח התיידדות עם סמלים.

אחת הסוגיות שהמורה חשבה עליה בעת ששאלה את השאלה, היתה שהציר הביא את התלמידים להדגיש באופן מפורש שהערכים האפשריים הם בין אפס ל- 2.90, בעוד שהכתיבה $x<2.90$ משמיטה את הרעיון ש- x צריך להיות, במקרה זה, מספר חיובי. להפתעתה, היא קיבלה תשובה לגמרי לא צפויה. אחת התלמידות אמרה, במידה רבה של שכנוע: "$x<2.90$ מראה משהו אחד שקטן מ- 2.90, אבל הציר מראה את כל המספרים במכה אחת". תשובה זו הפתיעה את המורה ואותנו והאירה את עינינו באשר לדרך בה התלמידה חשה את הסמל x. איננו סבורים כי הכתיבה המתמטית המדויקת $\forall x \in \Re \,|\, x < 2.90$ היה בכוחה לתרום לראיית כל המספרים בהסתכלות אחת, משום שלדעתנו התלמידה ראתה ב- x מעין "מראה מקום" שבו ניתן להציב ערכים מספריים רבים, אך כל אחד בתורו. יתכן כי התלמידה נמצאת בשלב של הבנה חלקית של ההכללה המתאפשרת באמצעות שימוש בסמל x, כאשר לגביה ההכללה היא מנגנון אופרטיבי המאפשר הצבה של מספר אחד בכל פעם, יותר מאשר ביטוי הטוען טענה על קבוצה של מספרים. למרות ידיעתה כי ניתן להציב יותר מערך מסוים אחד ב- x, לא ראתה אותה תלמידה בביטוי $x<2.90$ את מה שהצליחה לראות בייצוג באמצעות הציר. חשוב להדגיש כי הערת התלמידה נאמרה וקיבלה מקום בתוך אווירת כיתה שאפשרה לתלמידים לבטא את מה שהם רואים וחשים. יכול מאד להיות כי המעבר הלוך ושוב בין שתי ההצגות במהלך ההוראה יטפח את התחושה ש- $x<2.90$ (ליתר דיוק $0<x<2.90$) והקטע על הציר הם ייצוגים של אותו רעיון, ואולי מעבר לכך, שיש דרכים שונות לבטא רעיון ולכל דרך ייחוד משלה.

מה ניתן ללמוד מן השיעור?

הדיון הכיתתי שהתקיים בשיעור זה מדגים כי:

- מעורבות בכיתה וערנות של תלמידים רבים יכולה להיות קשורה לנקודת המוצא של השיעור: סיטואציה מציאותית המצדיקה דיון בצורך במושג המתמטי של אי שוויון.
- במעבר מדיון לא פורמלי על סיטואציה מציאותית אל סמלים מתמטיים יש מקום לתת לתלמידים אפשרות להתבטא. בחירת הייצוגים השונים יכולה להוות נושא לשיחה ולדיון לגיטימי, העשוי לחשוף באופן מפתיע כיצד תלמידים רואים וחשים ייצוגים. לא זו בלבד שדברי התלמידים מזמנים למורה צוהר אל מחשבותיהם, אלא שעצם ביטוי הדברים מאפשר לתלמידים לחוש לגיטימיות בהבעת מחשבה ושכל ישר.
- לעתים כדאי לשקול את מקומה של השאיפה ל"סגירות" של נושא או של תשובה מסבירה מלאה הניתנת מצד המורה. רצוי שהשאיפה לא להשאיר אי-בהירויות באוויר תישקל כנגד חיזוק התחושה אצל התלמידים שכל מה שהם עושים ואומרים טעון תיקון והשלמה. לעתים סגירות כזו נחוצה, ולעתים היא יכולה להידחות, שהרי לתלמידים לא יחסרו הזדמנויות לחזור ולהתנסות בסוגיות הנלמדות.

5.2. שני שיעורים בנושא פונקציות בכיתה ט'.

הכיתה המתוארת להלן היא כיתה ט' בבית ספר אזורי מקיף גדול הממוקם בקיבוץ במרכז הארץ. בשכבה זו לא קיימות קבוצות נפרדות עבור רמות ב' וג', ולכן לומדים בכיתה כ- 20 תלמידים משתי הרמות יחד. התלמידים החלו ללמוד את נושא הפונקציות בעזרת הספר "לומדים פונקציות" מסדרת *מתימחשב* שפותחה בקבוצת המתמטיקה. ביקורינו בכיתה החלו כחודש לאחר פתיחת שנת הלימודים תשס"ב, כאשר עד לשלב זה נלמדו ייצוגים שונים (טבלה, גרף ותבנית) עבור מספר התאמות. הגרפים שהתקבלו היו תמיד רציפים.

נתאר תצפיות משני שיעורים שהתקיימו בכיתה זו בהפרש של שבוע, אשר ביניהם קיימת המשכיות מבחינת הנושא. השיעור הראשון שנתאר נבנה סביב הפעילות "באיזו שעה מכינים שיעורים". הפעילות, האופן בו נערכה בכיתה והדינמיקות שהתפתחו סביבה יתוארו להלן בתוך רצף השיעור, בלווית ניתוחים במקומות המתאימים.

<u>א. תחילת הפעילות - איסוף נתונים:</u>

הפעילות ניתנת במקור כעבודת בית בה כל תלמיד אוסף נתונים במשך עשרה ימים לגבי מספר השעות שחלף בכל יום משעה שהגיע לביתו ועד לשעה בה התיישב להכין את שיעוריו. החלטתה של המורה היתה לעבוד על פעילות זו בכיתה, כאשר התלמידים התבקשו, כל אחד בתורו, "לתרום" נתון לגבי יום מסוים. בכך היתה אמנם החמצה מסוימת (הגרף אינו יכול לשמש ככלי להערכת מגמות), אך מצד שני התרחשה התנסות בתהליך של איסוף נתונים ובניית ייצוג טבלאי וגרפי במשותף. הכנסת הנתונים לטבלה כרוכה

בחישוב: על כל תלמיד המתאר את הנתון שלו לחשב את הפרש השעות, וכך הטבלה נוצרת לעיני התלמידים. החזרה על הפרוצדורה עשר פעמים הביאה לתיקון אי ההבנה של תלמידים שסברו כי מדובר במשך הזמן שלוקחת הכנת השיעורים, ולא בהפרש השעות כמתבקש. התלמידים אף סייעו זה לזה לחשב. ראוי לציין שהתלמידים התייחסו לסיטואציה אמיתית (כל תלמיד העריך את השעה בה הוא מגיע ואת שעת הכנת השיעורים בפועל) וכתוצאה התקבלו נתונים מציאותיים שכללו גם מספרים לא שלמים ונתונים חריגים (אחד התלמידים אמר שהוא מכין את שיעוריו בבוקר שאחרי השיעור, וכך התקבל הערך 14; לאחר מכן שאלה המורה אם יש מישהו המכין את שיעוריו מיד עם הגיעו הביתה, משניתנה תשובה חיובית התקבל הערך אפס).

- תגובת תלמיד שנרשמה בשלב איסוף הנתונים:

מ. טען שהוא מגיע הביתה בשעה חמש אחה"צ ומכין את שיעוריו בשעה שבע בבוקר למחרת. התפתח הדו שיח הבא:

המורה: אז כמה שעות זה יוצא?

מ. (זורק ניחוש): שמונה.

המורה: שמונה שעות אחרי חמש זה יוצא באמצע הלילה.

בשלב זה מ. ביצע חישוב בשני שלבים, כמה שעות מחמש עד חצות וכמה שעות נוספות עד שבע בבוקר, והגיע לתשובה הנכונה. כלומר, הפרוצדורה החישובית היתה ידועה, אך לא גויסה כאופציה ראשונה.

זוהי דוגמא להרגל התנהגותי אופייני לתלמידים חלשים, אשר נוח להם לזרוק את התשובה הראשונה העולה בדעתם מתוך ניחוש או אינטואיציה. ניתן להניח שהתלמידים מצפים, על סמך התנסויות קודמות, שהמורה יתקן אותם או ישאל מישהו אחר ולכן למעשה אין להם סיבה להתאמץ. דוגמא נוספת להרגל זה תוארה בניתוח הראיון עם דן בפרק 3 (ראה עמ' 27 לעיל). נציג כעת שתי דוגמאות קצרות נוספות, מהן עולה כי לעתים מספיק לחזור על תשובת התלמיד/ה או לשאול "הייתכן?" על מנת שהתשובה המקורית תישקל שוב ותתוקן לאחר מחשבה. בשתי הדוגמאות הנשאלות הן תלמידות כיתה ט' ברמה ג' (מ. = מראיינת):

דוגמא I: נתון כי 1 ס"מ במפה = 20 ק"מ במציאות .

מ.: כמה הם 2.5 ס"מ במפה, במציאות?

ק. (תשובה מיידית): 210 ק"מ.

מ.: האם זה ייתכן?

ק.: לא. עושים 2 כפול 20 ועוד חצי כפול 20.

מ.: אז כמה זה?

ק.: 50.

דוגמא II: נתון גרף המתאר מיחם מתרוקן.

מ.: מה המשמעות של הגרף?

ל.: ככל שעובר הזמן יש פחות מים במיחם.

מ.: תסתכלי בגרף ותגידי, כמה מים היו בזמן אפס?

ל. (תשובה מיידית): 0 ליטר.

מ.: הייתכן?

ל. (לאחר מחשבה): לא, כי זה אין מים ואז אין מה לרוקן.

בכל הדוגמאות, אפשר לראות שכאשר אין התעלמות מהתשובה השגויה ואף לא ניתן תיקון שלה, אלא האחריות לתשובה מוחזרת לתלמידים, מתבצעת חשיבה נוספת המביאה לתיקון התשובה על ידי התלמידים עצמם. במקרה של מ. המורה מחזירה אליו את האחריות על ידי ציון המשמעות של תשובתו. כתוצאה, עליו להפעיל פרוצדורת חישוב שהוא בהחלט מסוגל לה.

לסיכום אפיזודה זו: אנו מעלים כאן את ההשערה שתלמידים רבים עונים מבלי לחשוב, לא בגלל שאינם מסוגלים לכך, אלא בגלל הרגלי כיתה שהונצחו ועל פיהם המורה הוא בסופו של דבר האחראי, הוא יתקן והוא ישפוט. שינוי דפוסי ההתנהגות של המורה, כמו במקרה הזה, עשוי להחזיר את האחריות לתלמיד ואולי לשנות הרגל של מתן תשובה מיידית ללא נטילת כל אחריות על משמעותה.

<u>ב. המשך הפעילות - מעבר מטבלה לגרף:</u>

בהנחיית המורה התקיים דיון לגבי קנה המידה המתאים, כאשר התרשמותנו היתה שהכיתה כבר מיומנת בנושא של שרטוט מערכת צירים. הדיון התמקד תחילה בשאלת הערכים המקסימליים שיירשמו על גבי הצירים. לגבי ציר X ברור היה לתלמידים שיש לציין את עשרת הימים, לגבי ציר y המורה הסבה את תשומת לבם לערך הגבוה של 14 שיש לקחת בחשבון בשרטוט. בגלל הערכים הלא שלמים המופיעים בטבלה (למשל 3.5, 2.25), התלבטו התלמידים בשאלה כמה משבצות יציינו כל יחידה. המורה השאירה זאת בסופו של דבר לשיקול דעתו של כל תלמיד, כלומר גם כאן הוחזרה האחריות לתלמידים ולא ניתנה הוראה חד משמעית כפי שאולי התלמידים רגילים לה. הכיתה עבדה בעבודה עצמית, בערנות גבוהה. שוב, התלמידים עברו תהליך משותף של בניית הגרף ולמעשה ראו את הייצוג בהתהוותו.

<u>ג. דיון בשאלות תלמידים - האם אפשר לחבר בין הנקודות? איך אפשר לעשות מזה תבנית?</u>

במהלך העבודה העצמית התעוררה שאלת החיבור בין הנקודות. ראוי לציין כי על אף שהשאלה מופיעה בהמשך דף העבודה, היא נזרקה לחלל הכיתה לא על ידי המורה כי אם

על ידי תלמידה, ועוררה עניין בקרב תלמידים נוספים. התפתח דיון וניתנו תשובות שונות. אפשר היה להבחין בשלושה סוגי תשובות בהקשר לשאלה "האם אפשר לחבר":

1. חיבור הנקודות כאקט פיזי: תשובות מסוג - ברור שאפשר לחבר, אפשר לנסות, למה לא. לדוגמא:

ט. (מנפנפת במחברת שלה): אפשר לחבר, עובדה, הנה, חיברתי.

2. התייחסות לכך שהנקודות אינן קשורות זו לזו, משום שכל ערך התקבל מתלמיד אחר ואין תלות או קשר של "ניבוי" בין הערכים. זו פרשנות נכונה של הסיטואציה בה נאספו הנתונים, אם כי אין בה התייחסות לשאלה מהו חוסר המשמעות של חיבור הנקודות. לדוגמא:

מ.: זה גרף עמודות, אף נקודה לא קשורה לשניה.

ר.: לא צריך לדעת כמה שעות מתן עשה כדי לדעת מה מישהו אחר עשה.

עם זאת, היו שטענו כי אפשר לחבר בין הנקודות למרות שהערכים אינם קשורים זה לזה. לדוגמא:

א.: כל נקודה לא קשורה לשניה אבל בכל זאת אפשר לחבר.

(בתשובה זו ההתייחסות לחיבור הנקודות היא שוב כאל אקט פיזי אפשרי)

ד.: אפשר לחבר בקו אלכסוני, זה לא קשור כל אחד, זה כמו גרף של מכירות, עולה ויורד.

מדברי ד. עולה הטענה כי גם אם אמנם לא מתקבל גרף ישר מונוטוני כמו אלה שהופיעו בשיעורים עד כה, בכל זאת יש לגיטימציה לגרף מקוטע. גרף כזה מוכר לתלמיד מסיטואציה של "מכירות", סיטואציה שהיא חוץ-כיתתית. כלומר, יש התלבטות בין גרפים של בית הספר כפי שנלמדו עד כה (ישרים) ובין גרפים המוכרים מחוץ לבית הספר. ראוי להדגיש שהתלמיד מגייס את הלגיטימציה מן העולם הידוע לו על מנת לטעון שדבר מסוים הוא אפשרי גם אם הוא נוגד את הנלמד עד כה. אפשר אולי ללמוד מכך שתלמידים אלה מסוגלים להשתמש בניסיונם היומיומי לצורך תמיכה או סתירה של טענה מתמטית בכיתה, אם הסיטואציה מאפשרת קישור לניסיון כזה. ברמה העמוקה יותר של הבנת הנושא, אין אינדיקציה לכך שהתלמיד מודע להבחנה אפשרית בין גרפים מתוכם מתבהרת מגמה כלשהי, כמו גרף של מכירות, ובין גרפים עבורם אין משמעות תוכנית לקריאת מגמות, כמו הגרף שמדובר עליו בשיעור הנוכחי[6]. במלים אחרות, בתשובתו של ד. יש גרעין של נכונות, והוא שאין סיבה לשלול את חיבור הנקודות

[6] נזכיר כי כל נתון נאסף מתלמיד אחר; מסיבה זו אי אפשר לדבר על מגמות בגרף, כפי שאפשר היה לעשות במטלה המקורית שהופיעה בספר, בה הנתונים נאספים במשך עשרה ימים ע"י אותו תלמיד.

משיקול של אי-ליניאריות (שהרי דבר זה כבר נעשה בסיטואציה אחרת המוכרת לו), אך המשמעות העמוקה יותר עדיין טעונה בנייה.

3. פירוש המילה "אפשר" במובן של "כדאי"; לא כדאי לחבר בין הנקודות כי אז מקבלים נקודות המגלמות אינפורמציה חסרת משמעות. זו הפרשנות שהמורה שאפה אליה, אך אף תלמיד לא הגיע אליה בעצמו. למעשה, נראה כי עד תום השיעור עניין זה לא הובן. (אולם, בשיעור הבא היתה התקדמות בכיוון זה כפי שנראה בהמשך).

המורה הסבירה כי אם מחברים בין הנקודות, ניתן לקחת נקודה בין שתיים נתונות, ואז מתקבלים ערכי x שהם חסרי משמעות בסיטואציה הנתונה, העוסקת בימים שלמים.

שאלה נוספת שהתעוררה במקביל, שוב על ידי תלמיד, היא: איך אפשר לעשות תבנית? שאילת שתי שאלות יפות אלה במקביל מעוררת את התחושה שהתלמידים הפנימו מתוך החומר הקודם את סוג השאלות שעשויות להישאל בהקשר לפונקציות, ויש להם ביטחון בלגיטימציה לשאול את השאלות האלה. נקודה זו ראויה לציון ולהדגשה; אחד המאפיינים של למידה הוא בחינת הידע החדש המוצג בפנינו לאור כל הכרוך בידע הקודם שרכשנו, לא רק מושגים אלא גם קשרים בין מושגים וכלים להסתכלות ולהפעלה שלהם. במקרה זה נראה כי התלמידים יודעים שהמעבר בין טבלה, גרף ותבנית הוא נורמה מסוימת בתחום, ועל בסיס זה הם שואלים מה לגבי המקרה החדש שהובא. השאלה בדבר התבנית - כמו קודמתה שנגעה לחיבור הנקודות - התפתחה לדיון, כאשר כל המשתתפים סבורים שאי אפשר לכתוב תבנית. נימוקים שונים שניתנו על ידי תלמידים בכיתה הם:

- כי אין קשר בין הנקודות.
- כי הגרף לא טוב.
- זה גדֵל ב- 2, קטֵן ב- 2, גדֵל או קטֵן כל פעם במשהו אחר, זה לא מוסכם.
- אין מה שמאפיין את הגרף.
- אין קשר בין הדברים.

המורה סיכמה: אין חוקיות קבועה.

לאחר הדיון ביקשה המורה לסכם בכתב על הלוח את התשובות לשאלות המופיעות בספר. היא חזרה אפוא לשאלה האם אפשר לחבר בין הנקודות, ובעצם פנתה בפעם השניה לתלמידים באותו עניין. אז אמר אחד התלמידים: לא, אי אפשר כי אין תבנית. ותלמידה אחרת אמרה: לא, כי הגרף לא סימטרי. אלה הם נימוקים שלא הופיעו קודם לכן. כלומר, הדיון על התבנית העשיר את הנימוקים לשאלת חיבור הנקודות. התלמידים כבר הפנימו את הרעיון שאי אפשר לחבר אבל הטיעונים החדשים אינם נשענים דווקא על דברי המורה

שככל הנראה לא היו ברורים להם, כי אם על הדיון בחוסר קיומה של תבנית (המובן של "סימטרי" בדברי התלמידה לא ברור, יתכן שהכוונה למונוטוניות).

ד. דיון בשאלות יזומות על ידי המורה לגבי הייצוג הגרפי.

1. המורה: האם יש נקודה על ציר y?

תשובות התלמידים לשאלה זו מבטאות התייחסויות שונות לאפס, כאשר לא לכולם ברור מה המשמעות של אפס בהקשר זה (נזכיר כי מדובר באיסוף דיסקרטי של נתונים על פי ימים, כך שלמעשה קיימים רק ערכים טבעיים של x, החל מ- x=1). דוגמאות לתשובות תלמידים:

- זה אומר שלא הכנת שיעורים.

בתשובה זו האפס נתפס במשמעות היומיומית של "כלום", "אין". כאשר התלמיד שואל את עצמו מה אין כאן, התשובה הספונטנית היא שאין שיעורים שהוכנו.

- זה אומר שהכנת מיד כשקיבלת.

בתשובה זו האפס מתפרש כ"אפס זמן", כלומר יש בלבול עם נקודת אפס על ציר x.

- זה אומר אפס ימים ואין דבר כזה.

זו התשובה שהמורה מעודדת וחוזרת עליה.

2. המורה: מה משמעות הנקודה שסומנה על ציר x?

כאן התלמידים מפרשים את האפס כמצופה, אולי משום שהיתה כאן למעשה חזרה על הרעיון מזווית שונה; כזכור, בתחילת השיעור שאלה המורה אם יש מישהו שמכין שיעורי בית מיד עם הגיעו וכך התקבל הערך אפס. כעת, עם השאלה ההפוכה, התלמידים כבר ידעו לפרש את הערך y=0 בתור הכנה מיידית של שיעורי בית, אך מעניין לציין שהם הקנו לכך קונוטציה לא מתמטית: הערך y=0 זוכה בכיתה לשם "חריצות". תופעה זו היא דוגמא של מעבר חופשי ומיידי משפת הייצוג לשפה היומיומית. בניגוד לסברה המקובלת, כי עבור תלמידים אלה העולם היומיומי והעולם המתמטי הם שני עולמות נפרדים, יש כאן ראייה ל"ערבוב" העולמות ללא אבחנה ביניהם. הדבר עשוי להעיד גם על כך שהתלמידים הפנימו את שפת הייצוג במקרה זה.

3. המורה: מהו ה- y הגדול ביותר ומהו ה- y הקטן ביותר שיכול להתקבל?

תשובות תלמידים -

פ.: 24 שעות. (כלומר עד היום הבא ניתן להכין שיעורים).

ר.: זה לא מוגבל, כי אם יש חופש אז יש הרבה זמן להכין. זה יכול להיות אפילו אינסוף, אתה יכול להכין שיעורים הרבה זמן אחרי.

מ.: כדי לחשב את הערך הגדול ביותר צריך לקחת בחשבון מתי מכינים שיעורים, זה יכול להיות מ- 2:00 שמגיעים הביתה הכי מוקדם ועד 8:00 בבוקר למחרת.

(שוב מ. מחשב 2 עד 12 שזה 10 ועוד 8 ומגיע לתוצאה 18. זו התוצאה שנרשמת כתשובה על הלוח).

י.: יכול להיות y שלילי, כי אפשר להכין שיעורי בית באוטובוס, לפני שהגעת הביתה.

תשובה זו זכתה להערכה רבה מצד המורה. היא הסבירה כי כנראה לא לכך היתה הכוונה בסיטואציה שבספר, והתשובה הצפויה שם היא y=0, אך בכל זאת ניתן להביא את הערתו של י. בחשבון ולקבל ערכים שליליים.

דבריהם של ר. וי. מדגימים את האווירה, בה התלמידים מאתגרים את ההנחות של בניית הייצוג, מעבר למה שהמורה התכוונה. שוב, התלמידים מסתמכים לשם כך על ניסיונם היומיומי בסיטואציות של הכנת שיעורים.

מה ניתן לומר על השיעור?

1. ה"מגרש המתמטי" בו פעלו התלמידים בשיעור זה מורכב מן האלמנטים הבאים:

- בנייה, הערכה ופענוח של ייצוגים, דיון על מאפיינים של ייצוגים.
- "מותר ואסור" בבניית גרפים.
- חישובים וסקלות.

2. העובדה שהסיטואציה בה עסק השיעור מוכרת לתלמידים היתה מנוע לדיון. במילה "מנוע" אין כוונתנו רק לנושא המוטיבציה (מקובל לטעון ששימוש במקרים הלקוחים מעולמם של התלמידים מגביר את המוטיבציה ללמידה). טענתנו היא שידע חוץ מתמטי שתלמיד מצוי בו עשוי לדחוף אותו להשתתף בדיון, מן הסיבה הפשוטה שהוא יודע במה מדובר. במילים אחרות, אפיונים של הסיטואציה שהם לכאורה לא מתמטיים יכולים לדחוף את הדיון המתמטי קדימה, משום שהם מספקים עוגן הגיוני להיאחז בו ולקשור סביבו משמעויות חדשות. תנאי הכרחי להשתתפות בדיון הוא, שהתלמיד יחוש לגיטימציה מצד המורה להביא את "הידע הפשוט" שלו לכיתה, וכמו כן ירגיש מספיק נוח בתוך הסביבה שנוצרה בכיתה על מנת לומר משהו ולדעת שדבריו יישמעו ויתקבלו.

3. למרות הקשיים שהתעוררו, רבים מן התלמידים התמודדו עם המטלות והיו עדויות ליכולות קוגניטיביות שאולי לא מצפים להן בקבוצה זו (אם כי, כאמור, יש מקרים בהם הרגלים התנהגותיים עשויים לשבש את חשיפת היכולות הללו). דבר זה בא לידי ביטוי בכך שתלמידים שונים -

- שאלו שאלות עקרוניות העומדות בלב הנושא של פונקציות.
- תרמו לדיון הערות מאתגרות ולא נשארו בגבולות שהכתיבה הסיטואציה הנתונה.
- הסתמכו על ניסיונם היומיומי על מנת לטעון טענות מתמטיות.

- הפגינו יכולת להפעיל שיקול דעת בתנאי שהאחריות לכך נותרה בידיהם.
- הפגינו יכולת לנוע הלוך ושוב בין הייצוג המילולי שבסיפור (ובחיים) ובין הייצוג הגרפי.
- לא נרתעו משימוש במספרים לא שלמים כאשר אלה נבעו באופן טבעי מצורת איסוף הנתונים.

4. באופן כללי לא היו פרוצדורות קשיחות, לא היו תשובות יחידות שהתקבלו או נכפו, היה מקום לדיון וכבוד מצד המורה לטיעונים ולתהיות המובאים. אם להשתמש במונחיו של חזן (Chazan, 2000), אלמנט ה"נכונות" כקריטריון בלעדי צומצם לטובת דיון כיתתי באופן שיעודד מעורבות של מספר רב ככל הניתן של תלמידים. נוצרה אווירת כיתה שבה דיון על הייצוג הוא לגיטימי, ובמסגרתו התאפשר פתח לתובנות לא מעטות שצצו ונדונו. אפשר לראות בכך המחשה לטענה כי משא ומתן על משמעותם של ייצוגים, המובא על ידי התלמידים עצמם, עשוי להיות פורה הרבה יותר מאשר "הנחתה" של הייצוגים ה"נכונים" (ראה למשל עבודתם של דיססה וחובריו (diSessa et al., 1991), שתיארו בנייה של ייצוגים גרפיים על ידי תלמידים).

לדעתנו מדגים שיעור זה כיצד יכול מורה, בעזרת חומרי למידה מתאימים, להפוך שיעור מתמטיקה לחי ותוסס גם עבור הקבצה נמוכה. במקרה זה, המורה הראתה -

I. מוכנות לוותר על תפקידה המסורתי של המורה כאוטוריטה יודעת-כל, לטובת תפקיד של גורם מכוון בתוך רב שיח.

II. הכרה בכך שניתן ליישם גם לגבי תלמידים חלשים אסטרטגיות הוראה המשלבות מיומנויות חשיבה גבוהות. יש להותיר בידי התלמידים מידה של אחריות לגבי פעולותיהם ולשנות במידת האפשר את הרגלם לקבל מן המורה בכל רגע נתון תכתיבי פעולה, תשובות מן המוכן ותיקוני טעויות.

III. רצון להתחלק עם התלמידים במה שמכונה על ידי חזן בשם "משא הרלוונטיות" - המורה מסייע לתלמידים לראות מתמטיקה בעולם סביבם ונותן לגיטימציה לחיבורים שהם מבצעים בין עולם המתמטיקה לעולם שלהם.

IV. גילוי כבוד והקשבה לטענות, שאלות ותשובות של תלמידים, גם כאשר אין הדברים עולים בקנה אחד עם הקריטריון של "נכונות" שהזכרנו קודם. עידוד התלמידים להתבטא ולהקשיב זה לזה, הכרה בכך שאמירות "שגויות" עשויות לקדם את הלמידה המשותפת, משום שכמעט בכל אמירה כזו יש גרעין כלשהו של נכונות מסוימת.

נעבור כעת לתיאור השיעור השני בו צפינו, שהתרחש כשבוע לאחר השיעור שתואר לעיל. נושא השיעור: "סיפורי פונקציות" שחיברו התלמידים כהכנה למבחן. התלמידים התבקשו להמציא סיטואציות מציאותיות קצרות אותן ניתן יהיה לתרגם לפונקציות, בדומה לסיטואציות שהופיעו עד כה בכיתה ובספר הלימוד (למשל: מיחם מתרוקן, תינוק עולה במשקל).

<u>א. הסיפור של ל.:</u>

ל. היא תלמידה המוגדרת על ידי המורה כתלמידה אופיינית לרמות ג', אם כי אינה מן החלשים ביותר בכיתה. ל. ביקשה מיוזמתה להציג את הסיפור שכתבה בבית. המורה, שתכננה לפתוח את השיעור באופן אחר, נענתה לבקשה.

ל.: ילד יוצא מביתו והולך לשוק. כל שעה עובר הילד 6 ק"מ.

המורה: איך המשכת את זה?

ל.: הייתי צריכה לעשות טבלה.

המורה: ועשית?

ל.: לא.

למרות שהמשימה בוצעה על ידי התלמידה בצורה מקוטעת (למעשה זו רק "הקדמה" למה שהתבקשה לעשות), המורה רשמה את הסיפור על הלוח. בשלב זה התרחשה תופעה ראויה לציון: תלמידים אחרים בכיתה הוסיפו לסיפור פרטים לא מתמטיים - לילד קוראים משה, הוא הלך לשוק כדי לקנות כך וכך. נוצרה תחושה שהילדים מעונינים לקרב את הסיפור לעולם שלהם. אפשר לראות בכך ראיה נוספת ל"ערבוב" בין העולם היומיומי והעולם המתמטי, תופעה שכבר נצפתה בשיעור הקודם. המורה לא גילתה חוסר סבלנות כלפי הוספת הפרטים הללו, שאפשר לראותם כלא רלוונטיים מבחינה מתמטית, אלא המשיכה לנסות לקדם את הלמידה מתוך "שביב הסיפור" שהציגה ל., על ידי הפניית שאלות נוספות. במעשה כזה המורה בעצם מהווה סמכות, לא על ידי קביעה מה רלוונטי ומה לא, אלא על ידי מעשיה: היא שומעת אך חותרת לשאלות אותן היא רואה כחשובות, מבלי להטיף על כך.

המורה: מתי הילד יגיע לשוק?

ל.: כשהוא יגיע.

המורה (אינה מתעקשת על תשובה בשלב זה): עם מה כדאי להתחיל?

ט.: עם הטבלה.

(תלמידים נוספים אמרו זאת במקביל, כלומר שוב ניכר שקיימת כבר היכרות טובה עם התהליך נתונים-טבלה-גרף-[תבנית]).

לאחר מכן ביקשה המורה מהכיתה להציע ערכים שיירשמו בטבלה, ומילוי הטבלה נעשה יחד, עד x=5, באופן שהתקבלה הטבלה הבאה על הלוח:

x שעות	1	2	3	4	5	x
y המרחק שעבר הילד	6	12	18	24	30	?

אז שאלה המורה אם מישהו יכול להציע תבנית. לחלל הכיתה נזרקו מספר תשובות במקביל:

- $y = x + 6$
- y שווה x לחלק ל- 6.
- y שווה x כפול 6.
- המורה (מתייחסת לתשובה הראשונה, שניתנה בין היתר על ידי ד.): בואו ננסה. אם x הוא 2 אז מה y?

ד.: 8, אז לא, y שווה x כפול 6.

שוב יש כאן דוגמא להחזרת האחריות לבדיקת התשובה לידי התלמידים, ללא שהמורה מקבלת את אחת התשובות ופוסלת את היתר.
כעת לפני שרטוט הגרף, ניסתה המורה שוב להגדיר תחום סביר לסיפור, הפעם מכיוון אחר:

המורה (לתלמידה ל. בעלת הסיפור): השוק נמצא במקום רחוק מאד כנראה.

ל.: נכון.

(בינתיים א. ממשיך להוסיף פרטים לסיפור, הילד יעצור לנוח בתחנת דלק וכו')

המורה: בואו נחליט, אחרי כמה שעות הוא מגיע לשוק?

ל.: 10 שעות.

המורה: קצת רחמנות...

תלמידה: מה זה משנה?

המורה: שיהיה קצת הגיון.

כלומר, גם המורה משתדלת להכניס את הסיפור לתוך מסגרת מעוגנת במציאות, ועל ידי כך לתת לגיטימציה לשימוש בהגיון "חוץ-מתמטי". לבסוף החליטו שההגעה תהיה לאחר 5 שעות.

<u>ב. מעבר מטבלה לגרף:</u>

לפני שרטוט הגרף עבור הסיפור, שאלה המורה על קני מידה אפשריים. קנה המידה על ציר x התקבל בטבעיות כיחידות של שעה. לגבי ציר y היו הצעות :

- יש רק מספרים זוגיים בטבלה אז אפשר לעשות רק מספרים זוגיים על הציר.
- אפשר לקחת קפיצות של 6. (הצעה זו הגיעה במקביל משני תלמידים)

ההצעות הללו מראות על קניית מיומנות במעבר מטבלה לייצוג גרפי, המתבטאת בכך שתלמידים מפעילים שיקול דעת לגבי קנה מידה יעיל בהתחשב בערכי הטבלה. המורה הסבה את תשומת לב הכיתה להצעות אלה, אך השאירה את ההחלטה לכל תלמיד כפי שנוח לו.

<u>ג. דיון בשאלה - האם לחבר בין הנקודות?</u>

לאחר סימון הנקודות שאלה המורה אם לחבר ביניהן. היא הזכירה שבפעם הקודמת היתה התלבטות לגבי חיבור הנקודות.

המורה (מפנה שאלה אל מ.): האם יש משמעות לחבר את הנקודות?

מ.: לא יודע, לא נראה לי, לא.

המורה: למה לא נראה לך?

מ. אינו עונה, אך מתקבלות תשובות מתלמידים אחרים, שכמעט כולם תומכים בחיבור הנקודות:

- כן, יש משמעות, כי זה מראה כמה הוא הלך.
- יש בזה חוקים מסוימים. זה עקבי. החוק לא יכול פתאום לעצור.
- הוא לא יכול פתאום לרדת.
- בגלל שזה רציף, כי יש מהירות קבועה.
- כי הכל קשור, אז אפשר לחבר, זה ברצף קבוע שקשור לעצמו.
- אפשר לחבר.
- זה עולה באופן קבוע.
- מה זה משנה אם יהיה קו או לא יהיה קו?

המורה מחברת את הנקודות על הלוח לישר. תלמידה בשם ר. מעירה דבר מה (התיעוד אינו ברור לחלוטין) על כך שהמדידה מתייחסת לשעות השלמות ולא למה שבין השעות, מה שגורר תגובות:

מ.: מה שבין השעות לא חשוב לנו, רק חשוב לנו הקילומטרים שכתוב בטבלה.

ע.: זה כן חשוב הקו.

ראויה לציון העובדה כי שאלת חיבור הנקודות ממשיכה להעסיק את התלמידים. בדיון שלעיל התקבלו תגובות של 10 (!) תלמידים, כלומר מחצית הכיתה. בנוגע לתוכן התגובות, ניתן להתייחס שוב לקטגוריות התשובות שהוגדרו בניתוח השיעור הקודם:

1. חיבור הנקודות כאקט פיזי: הפעם לא היה ייצוג לקטגוריה זו. לעומת זאת התקבלה תגובה אחת על פיה השאלה עדיין אינה נתפסת כבעלת חשיבות.

2. התייחסות לקשר בין הנקודות, המאפשר את חיבורן. מספר תלמידים ציינו את התכונות "רציף", "עקבי", "קבוע" כמכתיבות את הצורך לחבר בין הנקודות. יש כאן הדים לדיון שהתקיים בשיעור שעבר, בו תלמידים קשרו בין היכולת לרשום תבנית ובין האפשרות לחבר בין הנקודות. כמו כן יש התייחסות ויזואלית אל "החוק" (התבנית) כאל ישות בתנועה - החוק לא יכול לעצור, הוא לא יכול לרדת. יתכן שנוצר זיהוי בין תבנית ובין גרף רציף.

3. התייחסות לנקודות שבין נקודות הטבלה, המתקבלות אם מחברים את הנקודות. זהו למעשה השיקול שהמורה ביקשה להקנות בשיעור שעבר; היתה תחושה אז ששיקול זה לא הופנם. הפעם ר. מתייחסת לכך, אך תגובתו של מ. מראה שערכי הטבלה נתפסים כמקור בלעדי לשרטוט הגרף ולא כנציגים נבחרים. המורה מנסה שוב להסב את תשומת הלב לקיום או אי קיום משמעות לנקודות ביניים (להלן), ואפשר לראות כי ישנם תלמידים שכבר קלטו את השיקול ואחרים שעדיין לא:

המורה: כמה קילומטרים הוא עבר אחרי שעה וחצי (מראה בגרף)?

ל., מ. (במקביל): 9.

המורה: ויש לזה משמעות?

נ.: כן, 9.

המורה: אז מתי אפשר לחבר ומתי לא?

ר.: רק כשיש שעות קבועות.

נ.: תגידי לנו מתי אפשר לחבר ומתי לא!

א.: אין לזה משמעות, מה זה משנה?

המורה: אם משאירים כך את הנקודות, אז אפשר להתייחס רק לנקודות שסימנו.

א.: אבל רק לזה אני רוצה להתייחס ממילא.

ד.: אבל אם היא תשאל אותך מה יקרה אחרי שעה וחצי?

א.: אני אגיד לך - 3 שעות, אה, 3 קילומטר.

המורה: אחרי שעה וחצי, לא אחרי חצי שעה (א. חושב על כך אך בינתיים הדיון ממשיך).

המורה: זה שהנקודה לא רשומה זה לא אומר שהיא לא קיימת.

ד.: כי הוא כל הזמן הולך.

נ.: אז אפשר לחבר או אי אפשר?

ה.: מתי אפשר לחבר ומתי לא?

המורה: ניתן לחבר את הנקודות מכיוון שיש משמעות לכל הנקודות באמצע.

בשלב זה המורה מאפשרת לאחת מחברות הצוות (להלן ח"צ) של מכון וייצמן לנסות ולחדד את הנקודה:

ח"צ: יש כמויות שהן רציפות ויש כמויות שלא. למשל אם סופרים כל יום את מספר הזברות שיש בגן החיות, אז אם ביום ראשון היו 2 זברות וביום שני הגיעה עוד זברה ויש 3, אז זה לא אומר שאם נבוא בלילה בין יום ראשון לשני אז יהיו שתיים וחצי זברות. אבל אם אתה מודד את הגובה שלך כל חודש, ובחודש אחד היית בגובה שני מטר ובחודש אחריו בגובה שתיים ועשרים, אז סביר להניח שבאיזשהו מקום באמצע היית בגובה שתיים ועשרה. אולי אתם יכולים לתת דוגמא למשהו לא רציף?

י.: מספר של בני אדם.

המורה (פונה לתלמידה ר.): אמרת קודם שאין משמעות ל- 1.5 כי זה לא בטבלה.

ר.: לא אמרתי שאין משמעות, אמרתי רק שאנחנו מודדים כל שעה ולא באמצע.

המורה: אבל אפשר למדוד אחרי שעה וחצי?

ר.: אפשר.

המורה: בואו נכתוב סיפור שאי אפשר לחבר את הנקודות.

ל. (התלמידה שפתחה את השיעור) מציעה את הסיפור הבא, שהוא פרפראזה על הדוגמא של ח"צ, והסיפור נכתב על הלוח.

ל.: בגן החיות ישנם שבעה קופים. ביום השני נוספו 2 קופים ומתו 5 קופים (המורה רושמת - ביום השני היו 4 קופים. ל. ממשיכה באופן זה:) ביום השלישי היו 0 קופים, ביום הרביעי היו 10 קופים.

לאחר רישום הסיפור עברה הכיתה לייצוג הסיפור בטבלה.

המורה: מה יהיה ה- x ומה יהיה ה- y?

מ.: y יהיה הימים ו- x הקופים.

ר., ד. (במקביל): להפך!

לאחר מילוי הטבלה, אותה למעשה הכתיב התלמיד א. למורה, המשיכו לשרטוט הגרף. שוב נשאלה השאלה לגבי קנה המידה:

המורה: איזה מרחקים על ציר x?

א.: כל אחד (כלומר כל משבצת תהווה יחידה אחת).

המורה: ועל ציר y?

א.: כל אחד, זה רק עד 10, לא יקרה כלום.

כלומר - התלמיד מבחין בערך הגבוה ביותר בטבלה ומפעיל שיקול דעת לגבי קנה המידה המתאים.

א. מבקש לגשת ללוח ולסמן את הנקודות על גבי מערכת הצירים. יש קשב רב בכיתה ונראה כי כל התלמידים מעתיקים את השרטוט למחברתם.

המורה: האם אפשר לחבר בין הנקודות?

א.: לא, כי אין חצי קוף.

ש.: אי אפשר, אבל לא בגלל שאין חצי קוף, זה יכול היה להיות משהו אחר, נאמר מקלות, ויש חצי מקל.

ההערה של ש. מעידה על הבחנה יפה בין מושג הרציפות הפיזי ובין מושג הרציפות הגרפי בהקשר של נתונים מציאותיים. כלומר, אפשרי אמנם לדבר על כל כמות של מקלות ולא רק על מספרים שלמים, אך בכל זאת אין משמעות לחבור רציף של הנקודות משום שנקודות הביניים יהיו חסרות משמעות בקונטקסט של הסיפור.

לסיכום השיעור השני:

בשיעור זה נשארו התלמידים באותו "מגרש מתמטי" בו פעלו בשיעור הקודם. עדיין הם עוסקים בבניית ייצוגים, במעבר בין ייצוגים, בבחירת קנה מידה לבניית גרפים ובשיקולים לגבי שרטוט גרף רציף לעומת נקודות בדידות. יש תחושה של התקדמות בנושא משמעותן של נקודות ביניים.

אופי השיעור שוב פתוח, יש מקום נרחב לתשובות שונות של תלמידים ועידוד מצד המורה לתרומות מסוגים שונים (שאילת שאלות, יצירת סיפורים, חילוקי דעות בין תלמידים, גישה ללוח). שוב, לדעתנו מהווה שיעור זה דוגמא נאה לאפשרות קיומו של דיון מתמטי בקרב תלמידים אשר מקובל לראות אותם כפסיביים. באקלים שנוצר אולי לא מפתיע לראות גם תלמיד המוכן לגשת למורה בשעת ההפסקה על מנת להציע סיפור שכתב (דיווחנו על כך בדו"ח הביניים, קרסנטי והרכבי, 2001, עמ' 24).

יצוין כי המורה הסבירה לתלמידים כי במבחן שייערך בקרוב יהיה עליהם ליצור סיפור מתמטי ולבנות לו ייצוגים בטבלה, בגרף ובתבנית (אם ניתן). כלומר, דרך ההערכה משקפת את דרך ההוראה ואינה מנותקת ממנה.

5.3. שני שיעורים בגיאומטריה אנליטית בכיתה י'.

הכיתה המתוארת היא הקבצת מב"ר, בבי"ס מקיף עירוני גדול במרכז הארץ. בכיתה כ- 10 תלמידים (הנוכחות משתנה משיעור לשיעור, בשל הרחקות על רקע משמעת ובעיות אחרות). תלמידי הכיתה יושבים על פי רוב בזוגות או בשלשות. התרשמנו כי כחמישה מהם אקטיביים במהלך השיעורים, והיתר מגלים אדישות כלפי הנלמד בכיתה, וחלקם אף מפריע למהלך התקין של השיעור. למרות זאת, כפי שנראה להלן, מצליחה המורה רוב הזמן לקדם את העשייה וההבנה המתמטית של חלק ניכר מתלמידיה. כמה מן התופעות שעמד עליהן חזן (Chazan, 2000) מודגמות היטב בכיתה זו.

התלמידים לומדים גיאומטריה אנליטית בעזרת הספר העוסק בנושא זה מסדרת ש"י שפותח בקבוצת המתמטיקה (על העקרונות המנחים של סדרה זו ראה בסקירת הספרות). ביקורינו בכיתה התקיימו לקראת סוף שנת הלימודים תשס"ב. מתוך ארבעת השיעורים בהם צפינו, נתאר להלן שניים המייצגים את אסטרטגיות ההוראה בהם נוקטת המורה.

השיעור הראשון שנתאר עסק בנושא: כתיבת משוואת ישר כאשר נתונים נקודה ושיפוע. התלמידים למדו בשיעורים קודמים את מושג השיפוע, כאשר הדגש הושם על ההיבט הויזואלי (קביעת השיפוע בעזרת ספירת משבצות כלפי מעלה או מטה, כאשר זזים ימינה משבצת אחת). לאחר מכן קושר ייצוג זה של השיפוע לייצוגו כמקדם ה- x במשוואת הישר. באותו אופן, למדו התלמידים לזהות ויזואלית את נקודת החיתוך של הישר עם ציר y, ולאחר מכן להשתמש בנקודה זו לצורך קביעת המשוואה. מטרת השיעור הנוכחי היתה לבסס בעזרת דוגמאות נוספות את תהליך מציאת המשוואה, וכמו כן להגיע לדרכים אלגבריות ולא גרפיות למציאת ישר בהינתן שיפוע ונקודה. להלן נתאר את שלושת חלקי השיעור.

<u>א. עבודה עצמית.</u>

בתחילת השיעור קיבלו התלמידים דף לעבודה עצמית ובו תרגילים בנושא. המראיינת הסתובבה בכיתה וביצעה תצפיות מתערבות על תלמידים שונים (ביניהם נעם, ירדן ונאוה המוכרים לנו מפרק הממצאים הקודם על אינטראקציות בין תלמידים):

נאוה עבדה על סדרת התרגילים הבאה -

א. שרטט ישר ששיפועו 2 והוא עובר דרך (0,3). מה משוואתו?

ב. שרטט ישר נוסף ששיפועו 2 והוא עובר דרך (1,7). מה משוואתו?

ג. נסה "לאמוד" היכן יחתוך את ציר y ישר ששיפועו 2 אם הוא עובר דרך (3,15). רשום משוואה.

נאוה פתרה את סעיפים א' וב' בקלות, כאשר היא מוצאת את התשובה בעזרת שרטוט (סימון הנקודה, בנייה - בעזרת ספירת משבצות - של ישר בעל שיפוע 2 העובר דרכה,

מציאת נקודת החיתוך של הישר עם ציר y, שבמקרה הראשון היא הנקודה הנתונה, וקביעת ערך המספר החופשי במשוואה מתוך קריאת נקודת חיתוך זו). כשהגיעה לסעיף ג׳ הניחה את העט והפסיקה לעבוד. משנשאלה מדוע, ענתה שלא הבינה את הניסוח, ושאלה מה זה ״נסה לאמוד״. בתגובה יעצה לה המראיינת לקרוא את המשך השאלה ולהתעלם משתי המילים הללו, כלומר: ״היכן יחתוך את ציר y ישר ששיפועו 2 אם הוא עובר דרך (3,15)?״ נאוה שרטטה זאת ופתרה מיד.

זוהי דוגמא לקושי שנוצר כאשר אי הבנת הנקרא מעכבת את הפעולה המתמטית, שהיא כשלעצמה ברורה לתלמיד. חזן (שם) מנה קושי זה כאחד המאפיינים של תלמידים חלשים. אחת הדרכים להתגבר על כך היא שימוש בשפה פשוטה וצמצום ה״העמסה״ של מונחים טכניים על התלמיד.

סעיף ב׳ נפתר נכון גם על ידי חבריה לשולחן של נאוה: נעם וירדן. תשובתם היתה שהמשוואה היא $y = 2x+5$, משום שנקודת החיתוך עם ציר y היא (0,5). שלושת התלמידים נשאלו על ידי המראיינת כיצד ידעו שהישר יחתוך את ציר y ב- (0,5), והשיבו - לפי השרטוט, כלומר משסומנה הנקודה (1,7), ושורטט ישר דרכה ששיפועו (על פי ספירת משבצות) הוא 2, רואים שנקודת החיתוך היא 5. אז נשאלו התלמידים האם זה לא יכול להיות אולי 5.5 או 4.9, מפני שיתכן שהשרטוט לא מדויק. התלמידים חשבו על כך, ולבסוף אמר נעם: כי הולכים 2 אחורה מ- 7 ומגיעים לחמש. כלומר, בפירוש ניכרת כאן העבודה צמודת המשמעות על המושגים הנלמדים. נציין עוד, כי השאלה עניינה את שלושת התלמידים עד כדי כך שלא רצו לצאת להפסקה. גם מפרט קטן זה אפשר ללמוד שאין זה בלתי אפשרי לגרות תלמידים חלשים להתעניין בחומר. כבר ציינו לגבי השיעור שתואר קודם בכיתה ט׳, כי גם שם ניגש תלמיד למורה בהפסקה והעלה רעיון שחשב עליו לגבי התוכן הנלמד.

<u>ב. דיון במליאה המתייחס לתרגילים שנפתרו ולתרגיל הבא.</u>

לאחר שהתלמידים פתרו את התרגילים, סיכמה המורה את העבודה במליאה על ידי השאלה - מה ההבדל בין סעיפים א׳ וב׳, מדוע סעיף א׳ יותר קל מסעיף ב׳? נעם ענה שזה בגלל שבסעיף א׳ נתונה הנקודה ״של ההתחלה״ כלומר הנקודה על ציר y, ובסעיף ב׳ צריך קודם למצוא את הנקודה הזאת. זוהי דוגמא לטיפוח רפלקציה, גם אם בסיסית, של התלמידים על עבודתם.

בהמשך הוצג על ידי המורה התרגיל הבא:

מצאו ישר ששיפועו 2 והוא עובר דרך (20,45).

הבעיה שנדונה במליאה - קשה לשרטט את הנקודה כי היא רחוקה (מטרת הספר והמורה - להגיע לפתרון בצורה אלגברית ולא גרפית).

נאוה: נבנה את הצירים ככה שכל משבצת תהיה חמש, וככה נוכל לשרטט.

המורה: הצעה מצוינת. אבל נניח שאין לנו שום אמצעי שרטוט, אנחנו באי בודד.

נעם: עדיין אפשר לשרטט עם האצבע על החול.

המורה: נכון, אבל תשחקו אתי את המשחק, כאילו שאי אפשר.

המורה הציעה לנחש את המספר שחסר בתבנית $y = 2x + \square$. שלושה תלמידים הציעו את הניחושים 22, 25, 5. המורה רשמה על הלוח את האפשרויות שהתקבלו עבור משוואת הישר, כלומר: $y=2x + 22$ $y=2x + 25$ $y=2x + 5$.

לאחר מכן שאלה המורה - איך נוכל לדעת מי מן ההשערות נכונה, איך נוכל לדעת מי מן הישרים עובר בנקודה (20,45)? עבר זמן מה עד שאלעד אמר - זה משהו שהיה במבחן האחרון אבל אני לא זוכר. לבסוף נזכר וצעק: להציב! המורה אישרה שאכן זה מה שעושים כדי לבדוק האם ישר עובר דרך נקודה. התלמידים יחד עם המורה בדקו את שלוש ההשערות וגילו ש- $y = 2x+5$ נכונה. כלומר, אפשר לחלץ כלי פעולה לצורך בקרה מן התלמידים עצמם, וכאן תפקיד המורה הוא אכן לא לספק מיד את הכלי, אלא לפנות קודם אל התלמידים בשאלות כמו - איך אתם מציעים לבדוק, איך נדע מה נכון.

<u>ג. יישום שיטת הניחוש והבדיקה בדפי עבודה.</u>

התלמידים קיבלו דפי עבודה שבהם התבקשו ליישם את שיטת הניחוש והבדיקה, כלומר לנחש מספר תבניות לכל תרגיל ולבדוק על ידי הצבה מי מהן נכונה. למעשה, כל חמשת התלמידים שעבודתם נצפתה מקרוב לא נזקקו למספר ניחושים, משום שהבינו שאפשר להציב ישירות את ערכי הנקודה הנתונה ולגלות את המספר החסר. לאחר מכן עברו לתרגילים "רגילים", דהיינו הפיגום של שיטת הניחוש הוסר באופן רשמי והדרישה היתה למצוא משוואת ישר על פי נקודה ושיפוע על ידי הצבה. התלמידים ביצעו זאת באופן זורם למדי. עם זאת, במהלך העבודה ניתן היה להבחין בחסרים אריתמטיים; תלמידים התעכבו או התקשו בשאלות כמו:

- ‎-2 כפול ‎-3 זה 6 או ‎-6?
- כמה צריך להוסיף ל- 6 כדי להגיע ל- 15?
  (תשובת התלמיד הראשונה 7, לאחר מחשבה נוספת תיקן).
- כמה צריך להוסיף ל- ‎-30 כדי לקבל 27?

התקבלו התשובות ‎3,-3. המורה התייחסה לכך ושאלה שאלה מכוונת: צריך להוסיף יותר משלושים או פחות משלושים? כמו כן המחישה ויזואלית, בתנועת יד באוויר, שאלה שני מספרים משני צדי האפס והמרחק ביניהם גדול יחסית ולא קטן כמו 3. באופן זה סייעה

לתלמידים להגיע לתשובה 57. (שיטה זו עזרה מאוחר יותר שוב לנעם כאשר היה צריך למצוא כמה יש להוסיף ל- 65- על מנת לקבל 35. השרטוט של הציר באופן הבא -

65-______________________________0_______________ 35

גרם לתגובה המיידית "אה, אני צריך גם את המרחק הזה וגם את המרחק הזה", וכך מצא שהתשובה היא 100).

ד. התלמידים שותפים בתכנון שיעורי הבית.

בסוף השיעור ביקשה המורה מכל תלמיד לתרום תרגיל לשיעורי הבית על ידי כך שיאמר נקודה "רחוקה" כלשהי, אליה התאימה המורה את השיפוע (כך שרמת האריתמטיקה לא תהיה קשה מדי). המשימה לתלמידים היתה לחשב את משוואת הישר. המורה פנתה גם אל תלמידים שהיו פסיביים בשיעור. התקבלו תשעה תרגילים, וירדן אמרה "היום אני כן אעשה שיעורי בית. כשאני מבינה אני אוהבת להכין שיעורי בית".

* נעבור כעת לתיאור שיעור נוסף בו צפינו בכיתה זו, שהתרחש כשבועיים לאחר השיעור שתואר לעיל. בשיעור נכחו שמונה תלמידים.

נושא השיעור - שיפועי ישרים מאונכים. בשלב מוקדם יותר למדו התלמידים את הקשר בין שיפועי ישרים מאונכים ותרגלו חישובי זוגות של מספרים המקיימים קשר זה (למשל, 7 ו- - 1/7, 1/2 ו- -2).

גם בשיעור זה אפשר היה להבחין בדפוס דומה לזה של השיעור הקודם: עבודה עצמית, דיון במליאה ושוב עבודה עצמית.

בחלק הראשון של השיעור עסקו התלמידים בפתרון עצמאי של תרגילים אשר הדרישה המרכזית בהם, בואריאציות שונות, היתה למצוא משוואת ישר מאונך לישר נתון, העובר דרך נקודה נתונה. המורה הסתובבה בין התלמידים וענתה על שאלות. צפינו באלעד ובירדן, שישבו יחד, במהלך עבודתם. בעוד שאלעד עבד במרץ וסיים את העמוד כולו (לאחר השיעור בדקנו ומצאנו כי תשובותיו נכתבו באופן שוטף ונכון, עם נימוקים המעידים על הבנת החומר), ירדן נראתה אבודה, וטענה כי אינה יכולה לעבוד מאחר שאינה זוכרת דבר מן החומר הקודם. המראיינת שישבה לידה הזכירה לה מושגים בסיסיים הקשורים לתבניות של ישרים: תחילה הוזכר השיפוע וביטויו הגרפי, מושג אשר ניכר היה כי ירדן מכירה אותו היטב משום שמיד יכולה היתה ליישמו בשאלת ביניים. לאחר מכן הוזכר האופן בו מוצאים את המספר החופשי בתבנית הישר $y = \square \cdot x + \square$ על ידי איתור נקודת החיתוך שלו עם ציר y. תזכורת זו דרשה זמן וכארבע-חמש דוגמאות. לעומת זאת הקשר בין מספרים שהם שיפועי ישרים מאונכים - שהוסבר על ידי המורה קודם לכן באותו יום -

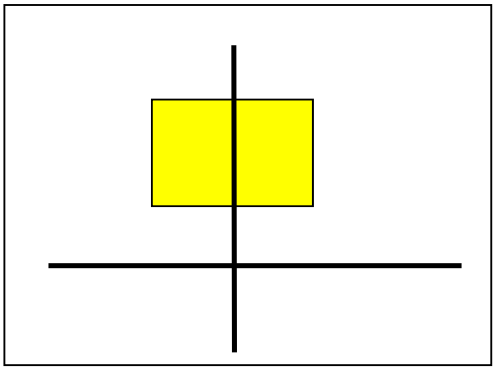
נשלט על ידי התלמידה ללא קושי. לאחר תזכורת זו היתה ירדן מסוגלת לענות על השאלות.

המקרה של ירדן בשיעור זה מדגים בעיה שמקובל לראות בה את אחד המאפיינים העיקריים של תלמידים חלשים, והיא זיכרון פעיל קצר-טווח (Arcavi, Hadas & Dreyfus, 1994). תלמידים שפתרו בהצלחה שאלות בנושא מסוים, עשויים לשכוח פרטים עקרוניים הקשורים לאותו נושא כמה שיעורים לאחר מכן. במקרה של ירדן, הנושא של מציאת משוואת קו ישר על סמך נקודה ושיפוע נלמד רק שבועיים קודם לכן (זהו השיעור שדווחנו עליו לעיל). לעתים תכופות על המורים בכיתות אלה לנקוט באסטרטגיה של "צעד אחד אחורה ושניים קדימה" על מנת להתקדם בחומר.

חשוב לציין, כי תיאור האפיזודה שלעיל, כמו גם תיאורי אפיזודות אחרות בדו"ח שבהן נעזרו תלמידים במראיינת באופן פרטני, אינם באים לטעון כי עזרה פרטנית מסוג זה עושה פלאים ומביאה את התלמידים מאי הבנה מוחלטת להבנה טובה של החומר. טענה כזו תהיה בבחינת אשליה. הנושאים המתמטיים המדוברים הם מורכבים ורבי ניואנסים, וישנם רצפים של הבנה בכל נושא. רק עשייה מתמשכת ודוגמאות רבות לאורך זמן בונים הבנה משביעת רצון. ברם, המקרה של ירדן מדגיש כי גם אם ההבנה היא חלקית, התמיכה שניתנת לתלמיד עשויה "להזיז" אותו מחוסר מעש מוחלט לתחושה של עשייה מוצלחת, תחושה שהיא לעתים קרובות המפתח להמשך המעורבות.

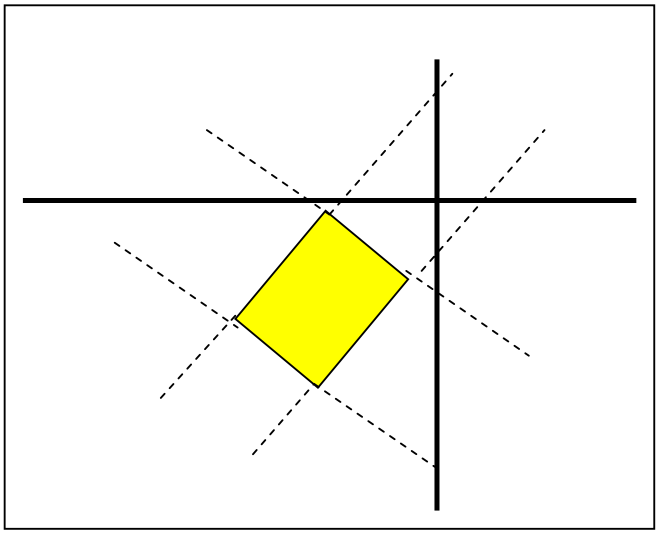
<u>דיון במליאה:</u>

נושא הדיון היה מציאת משוואות של צלעות מלבן. תחילה הציגה המורה מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. היא עשתה זאת על ידי הנחת מלבן קרטון גזור על גבי הצירים המצויירים על הלוח, כמתואר בתרשים 17. התלמידים התבקשו להציע משוואות של ישרים שעליהם לדעתם מונחות צלעות המלבן (הצירים היו נטולי סקלה, כך שמתאפשרות הצעות שונות). חלק מן התלמידים הציעו את המשוואות $y=2$, $y=6$, $x=4$, $x=-4$. המשוואות נרשמו על הלוח, ואז מצאו התלמידים את קדקודי המלבן וחישבו את אורכו ורוחבו, 8 ו- 4.



תרשים 17

לאחר מכן, הזיזה המורה את מלבן הקרטון לפוזיציה אלכסונית כמודגם בתרשים 18.



תרשים 18

שוב התבקשו התלמידים להציע ארבע תבניות עבור הישרים שעליהם מונחות הצלעות. התקבלו ארבע הצעות, אשר כולן נרשמו על ידי המורה על הלוח, תוך ציון שם המציע/ה.

ההצעה של לימור:

$y = 4x+4$

$y = 4x-3$

$y = 8x-4$

$y = 8x-8$

ההצעה של לימור מבטאת הבנה של רעיון השיפוע השווה בין מקבילים, אך לא של שיפועי ניצבים. יתכן שנעשה שימוש במספרים 4 ו- 8 בגלל אורך ורוחב המלבן.

ההצעה של נאוה:

$y = -x-4$

$y = -x-12$

$y = 1x+3$

$y = 1x-1$

כאן יש יישום של רעיון השיפועים של ישרים מקבילים וניצבים. נאוה טענה בדיון כי בחרה את המספרים כך שאורך המלבן יישאר 8 ורוחבו 4. אכן, ההפרשים בין המספרים החופשיים בתבניות הם 8 ו- 4. למרות שנאוה שגתה בהנחתה, שהרי תבניות אלה לא ייצרו אורך של 8 ורוחב של 4 בשל הפוזיציה של המלבן, בכל זאת היתה תשומת לב למימדי המלבן כפי שחושבו בפוזיציה הקודמת. העובדה שנאוה הביאה את האורך והרוחב בחשבון בשיקוליה, יחד עם שיקולי השיפועים המאונכים והמקבילים, מעידה על יכולת לחשיבה על מספר גורמים בו זמנית. נציין כי סיטואציה כזו יכולה לשמש בידי המורה כהזדמנות לצמיחה מתוך שגיאה, כמוצע ע"י סמית' ושותפיו (Smith, diSessa & Roschelle, 1993, ראה בסקירת הספרות). אפשר להראות אילו קטעים בשרטוט הם אכן באורך של 8 ו- 4, תוך השוואת קטעים אלו ויזואלית עם אורך ורוחב המלבן. כך נתפסת התפיסה המוטעה כגרעין שעליו עשוי להיבנות ידע חדש ונכון, במקום כמכשול.

ההצעה של נעם:

$y = x-3$

$y = 2x+5$

$y = -x-6$

$y = -2x-8$

הצעה זו משקפת בלבול מסוים בין האלמנטים של שיפועים שווים עבור מקבילים, נגדיים והפכיים עבור ניצבים.

ההצעה של אלעד:

$y = x+2$

$y = x-1$

$y = -x-8$

$y = -x-2$

ההצעה של אלעד, כמו זו של נאוה, מעידה על הבנת הרעיון המרכזי של הקשר בין שיפועי ישרים במלבן.

ראוי לציין שכל ארבע ההצעות לקחו בחשבון את השרטוט שעל הלוח, מבחינה זו ששלושה מערכי המספרים החופשיים הם שליליים ואחד חיובי.

המורה דנה עם התלמידים על ההצעות, תוך התמקדות בשאלה מדוע יש לתקן את אלה של לימור ונעם.

בחלק האחרון של השיעור חזרו התלמידים לעבודה עצמית. התרגילים שהתבקשו לפתור היו כאלה בהם יש להתבונן בזוגות של ישרים נתונים ולקבוע האם הם מאונכים או לא, או

(בתרגיל אחר) להחליט האם זוגות הישרים הנתונים הם מקבילים, מאונכים או לא זה ולא זה. נעיר, כי לדעתנו החלטת המורה לתת תרגילים מסוג זה בסוף השיעור היתה החלטה אסטרטגית המותאמת לסוג התלמידים: בשלב זה היו התלמידים עייפים וככל הנראה מיצו את יכולתם להיות פעילים, ולכן תרגילים בהם הדרישה העיקרית היא להתבונן ולהסיק מסקנות, ללא חישובים וללא שרטוטים, הם אופציה מועדפת.
בסיום השיעור פנתה המורה לאלעד וציינה את עבודתו היפה במהלך השיעור. למותר לציין כי אלעד עזב את הכתה כשהוא מרוצה מאד. גם נקודה קטנה זו היא חלק בלתי נפרד מהתנהגות תומכת של מורה.

לסיכום:

התלמידים בהם צפינו בשיעורים אלה הם בעלי מאפיינים טיפוסיים לתלמידים חלשים במתמטיקה, מאפיינים שנמנו בסקירת הספרות ואשר הצבענו עליהם גם בהקשר לתלמידים שרואיינו באופן אישי: יכולת קשב מוגבלת לזמן קצר, קשיים בהבנת הנקרא, בסיס אריתמטי רעוע, צורך מתמיד בתשומת לב אישית וזיכרון קצר-טווח.
מן השיעורים בהם צפינו בכיתה זו, אשר שניים מתוכם תועדו לעיל, ניתן להתרשם כי המורה נוקטת באסטרטגיות הוראה וניהול שיעור הלוקחות בחשבון את הצרכים והבעיות המיוחדים של תלמידים מתקשים במתמטיקה. נציין את הבולטות בהן:

- חלוקת השיעור לקטעים של עבודה עצמית לעומת הסברים או דיון במליאה, לסירוגין. באופן זה הקטעים בהם נדרשים התלמידים לקשב מרוכז הם קצרים יחסית.
- שימוש רב בייצוגים הויזואליים של המושגים הנלמדים, כך שהלמידה תהיה צמודת משמעות גם במהלך יישום המושגים בתרגילים.
- מתן אפשרות לתלמידים להציע הצעות ולשקול את הצעות חבריהם. ההצעות נרשמות על הלוח תוך ציון שמות המציעים, ודבר זה מעניק ערך מוסף של תשומת לב אישית לתלמידים.
- טיפוח רפלקציה על ידי שאילת שאלות כגון "מה קל יותר, מה קשה יותר, מדוע?" וכדומה.
- חיזוקים חיוביים לתלמידים שעבדו היטב, היוצרים רצון להמשיך ולעבוד.

6. סיכום.

דו״ח זה עוסק בתלמידים חלשים במתמטיקה בחטיבות הביניים, המנותבים להקבצות נמוכות (רמה ג׳). הדו״ח הציג ממצאים מתוך ראיונות אישיים עם תלמידים, תצפיות על אינטראקציות בין זוגות או שלשות של תלמידים וכמו כן תצפיות שעניינן מהלכי שיעור שלמים בפורום של הכיתה כולה. במסגרת הפעילות המחקרית שתוארה בדו״ח ניסינו לברר מה מאפיין את דרכי ההתמודדות של תלמידים חלשים עם חומר מתמטי, אלו מקורות עשויים להסביר הצלחה וכישלון בקרב תלמידים אלו, ומהם המרכיבים עליהם יש לתת את הדעת בעיצוב ההוראה בכיתות חלשות - הן מבחינת חומרי הלמידה והן מבחינת תפקודם של המורים.

בפתח הדו״ח סקרנו את הספרות העדכנית הקיימת לגבי אוכלוסיות חלשות במתמטיקה. הצבענו על כיווני מחקר חדשים שצמחו בשנים האחרונות, אשר מביאים בחשבון בין היתר מרכיבים חברתיים, מרכיבים קוגניטיביים ומרכיבים אַפקטיביים במעגל ההוראה והלמידה של תלמידים חלשים. התייחסנו בהרחבה לעבודתו של חזן (Chazan, 2000), מורה-חוקר הקורא להכרה בקיומן של נקודות חוזק אצל תלמידים שהמערכת סיווגה כחלשים, ודוגל בשינוי גישת הוראת האלגברה באופן שיעניק הזדמנות לתלמידים אלה להשתמש ביכולותיהם ולהתקדם. במסגרת הסקירה הודגש גם ההיבט של אמונות מורים, הן לגבי תלמידים חלשים והן לגבי אופייה של המתמטיקה הנלמדת בבית הספר, תוך בחינת ההשלכות האפשריות שישנן לאמונות מסוימות והצורך לשנות באופן מעשי את דרכי ההוראה הנגזרות מהן.

חלקו העיקרי של הדו״ח הוקדש לממצאים. מאחר שכל פרק ממצאים הכיל סיכום עצמאי, נעמוד כעת על מספר נקודות עיקריות, המתקבלות מעיון בכל פרקי הממצאים כיחידה רציפה. ההשלכות של הממצאים וההמלצות העולות מהם ישולבו כחלק בלתי נפרד מן הסקירה שלהלן.

1. קידום תלמידים חלשים באמצעות השיח המתמטי הלא פורמלי.

לאורך כל פרקי הממצאים בלטה התופעה של שימוש בשיח מתמטי לא פורמלי אצל תלמידים חלשים. ב״שיח לא פורמלי״ כוונתנו הן לאסטרטגיות שנקטו בהן תלמידים והן לידע עליו נשענו במסגרת התמודדות עם מטלות מתמטיות. ברוב המקרים שהצגנו, בין אם תוך כדי ראיון ובין אם במהלך שיעור, הסתמכו התלמידים מעט מאד על רוטינות נלמדות והרבה יותר מכך על חישובים מנטליים, ניסוי וטעייה והפעלת שכל ישר. במקרה הצורך גייסו לעזרתם ידע חוץ-מתמטי שהתקשר אצלם למטלות שלפניהם. ראינו, כי כאשר היה צורך לעבור לכתיבה פורמלית התגלו קשיים מסוגים שונים, כמו הקושי להגיע באמצעות

שפה כתובה להבעת רעיונות שהוסברו היטב בעל פה (המקרה של אורי, למשל); הקושי לאמץ מערכת סימבולית ולנצל את יתרונותיה על פני ניחוש (המקרה של דביר); הקושי להבין ולהפעיל את כללי השפה הסימבולית (למשל הפנמת הרעיון ש- $4x$ פירושו 4 כפול x, שהתקשו בו דביר ואחרים); הקושי "לתרגם" שברים לכתיבה עשרונית (דן והגר). לעומת קשיים אלה, ההפעלה של שיקולים לא פורמליים ושיטות שהומצאו אד-הוק לצורך המשימות, היתה לעתים קרובות מוצלחת. להבחנה זו יש על פי השקפתנו השלכות חשובות על עיצוב ההוראה הנדרש. כפי שהזכרנו בסקירת הספרות, רווחת אצל תלמידים ומורים העמדה כי אם לא נעשה שימוש בפרוצדורות פורמליות הרי ש"זאת לא מתמטיקה" (Ben-Yehuda et al., In press). מכיוון שדווקא השיח המתמטי הלא פורמלי עשוי לקדם תלמידים חלשים, יש צורך להכיר בחשיבותו של שיח זה, לתת לו לגיטימציה ולרתום אותו לצורך ניצול היכולות של תלמידים אלו. במהלך הדו"ח הזכרנו את הרציונל העומד מאחורי חומרי הלמידה שפותחו בקבוצת המתמטיקה. באופן כללי מסתמכים חומרים אלה יותר על שיקולי שכל ישר, אומדנים, המחשות באמצעות אובייקטים, גישות אינטואיטיביות ובקרה, ופחות על נוסחאות וטכניקות. המורות שאת שיעוריהן תיעדנו בדו"ח, פעלו אף הן ברוח זו. יודגש כי אין הכוונה לזנוח את ההיבטים הפורמליים של המתמטיקה ולעסוק רק באותם היבטים של המתמטיקה שאינם סימבוליים. אולם, מצד שני, אנו סבורים כי נזק מתרחש כאשר "מקדשים" את השיח הפורמלי וממהרים להתרכז בו עד כי נוצר קרע בין שיח זה ובין ההגיון האינטואיטיבי של התלמידים. תהליך הלמידה של מושגים מתמטיים, כפי שאנו רואים אותו, צריך להיות בנוי כמעבר שיש בו רצף והמשכיות הגיונית בין הידע הבלתי פורמלי, המתעדן ומתעשר בדרך להתגבשותו כידע פורמלי יותר. הדגש צריך להיות מושם על מציאת דרכים לסייע לתלמידים להבין ולהביע רעיונות מתמטיים באופנים שונים, כך שלאורך הלימוד יישמר הקשר למשמעות המושגים הנלמדים. על חשיבותה של ההיצמדות למשמעות נעמוד להלן.

2. "הוראה ולמידה לכאורה" לעומת למידה משמעותית.

בסקירת הספרות של דו"ח זה ציטטנו את טענתה של מרי מץ (Metz, 1978), כי נטייתם הרווחת של מורים ללמד כיתות של תלמידים חלשים באמצעות שיטות של העברת ידע רוטינית בקצב איטי, היא למעשה אסטרטגיה לניהול הכיתה באופן שימזער ככל האפשר חיכוכים אפשריים. נאמר שם, כי לעתים קרובות נערך בין המורה והתלמידים "חוזה בלתי כתוב", שמהותו הבסיסית היא כי המורה מצפה מן התלמידים להיות ממושמעים ולא להפריע, ובתמורה אינו מכביד עליהם במתן משימות מורכבות מדי. כינינו את מה שמתרחש כתוצאה מחוזים אלה בשם "הוראה ולמידה לכאורה", או לחילופין "האבטלה הסמויה" בהקבצה הנמוכה במתמטיקה: המורה מראה מהן המניפולציות שיש לבצע,

התלמידים מעסיקים את עצמם, במקרה הטוב, במילוי הוראותיו של המורה, אך כל למידה משמעותית אינה מתרחשת. ה"הקלות" שמציע המורה אינן מביאות עמן למידה נינוחה וטובה יותר ואינן מגבירות את הסיכוי למעורבות התלמידים: המסר הגלום בהן הוא שאין דרישה למימוש של פוטנציאל אפשרי, משום שככל הנראה יש להשלים עם כך שאין פוטנציאל כזה. במלים אחרות, התדמית של "תלמידים שלא יכולים" מונצחת. בדו"ח זה חזרנו והצבענו על יכולתם של תלמידים חלשים לבצע משימות מתמטיות הדורשות חשיבה ולעמוד על משמעותם של המושגים הנלמדים. המקרה של דן, למשל, המחיש היטב מסוגלות לנתח סיטואציה גרפית בלתי מוכרת וליישם לגביה את הכלים שנרכשו בכיתה בהקשר למושגים בסיסיים בנושא פונקציות. גם במקרה של דביר ניכרה יכולתו לפתור משוואות (בדרכו שלו), תוך היצמדות למשמעות הפתרון, וכמו כן המוכנות והיצירתיות שלו בחיבור "טריק מספרים" משלו. הדגמנו כי, בניגוד לאמונותיהם של מורים רבים שתלמידים חלשים יש "להאכיל בכפית" (Zohar et al., 2001), גם תלמידים בהקבצות נמוכות במתמטיקה עשויים להיות מעונינים באתגרי חשיבה, התפורים על פי מידתם (עמדנו על כך ש"תפירת אתגר על פי המידה" פירושה כיול מדויק של מידת הקושי; משימות קלות מדי או קשות מדי עלולות לחזק דימוי עצמי נמוך). הנקודה המרכזית כאן היא שינוי החוזה הבלתי כתוב שהזכרנו לעיל. במקום להיות פסיביים בתהליך הלמידה, התלמידים נדרשים למאמץ אינטלקטואלי, ומקבלים מסר שיש מהם ציפיות. הרווח הוא בכך, שיש יותר סיכוי ללמידה משמעותית והבנה שהולכת ומעמיקה ממשימה למשימה. ברם, כדי להשיג מטרה זו - וזה מתקשר ישירות לדברינו הקודמים - יש לאפשר לתלמידים לעבוד בכלים המביאים בחשבון את המאפיינים שנמצאו אצל תלמידים חלשים, אשר הוזכרו לכל אורך הדו"ח. עבודה באמצעות כלים אינטואיטיביים, נומריים, מילוליים וויזואליים, המעודדת חשיבה מתמדת על השאלה "מה בעצם אנחנו רוצים להשיג, לאן אנו חותרים", מאפשרת שמירה על קשר עם משמעות הפעולות הנעשות, במקום הניתוק המלווה לעתים קרובות את ההתרכזות בידע פורמלי או במניפולציות טכניות.

תרומה נוספת לחיזוק המשמעות של החומר הנלמד באה מכיוון המטה-קוגניציה. הבאנו במהלך הדו"ח מספר דוגמאות להפעלה של רפלקציה וחשיבה מטה-קוגניטיבית על ידי תלמידים חלשים. דן הפגין יכולת רפלקטיבית מרשימה בהסבירו בבהירות את מהלכי החשיבה שלו, וכמו כן היה מסוגל לראייה מטה-מתמטית שהתבטאה בהשוואה שערך בין ייצוגים שונים מבחינת טיב המידע שהם נותנים, ובדירוג שלו למספרים על פי הקלות בה הוא יכול להשתמש בהם ככופלים. דביר בחן והשווה את מידת השכנוע שיש לשיטות הסבר שונות, וכמו כן הראה ניצנים של רעיונות רפלקטיביים כאשר דן בשאלות כגון "מה קל לי, מה קשה לי, מה אני חושב שאזכור ומה לא". הדגמנו גם שיח מטה-מתמטי שהתרחש בפורום של דיון בכיתה. אנו מאמינים כי הן חשיבה רפלקטיבית המובעת באופן מפורש והן העיסוק בשאלות מטה-מתמטיות מגבירים את הקשר למשמעות המושגים

והתהליכים הנלמדים, משום שהם מסיטים את המוקד משאלות של "איך" לשאלות של "מה" ו"למה". טיפוח של חשיבה רפלקטיבית ומטה קוגניטיבית נראה לנו אפוא לא רק אפשרי, אלא רצוי, כאחת המטרות שיש לאמץ בהוראת תלמידים חלשים.

3. הפער בין חשבון וחשיבה: בעיית האריתמטיקה הלקויה אצל תלמידים חלשים.

אחת התופעות הבולטות אצל תלמידים חלשים במתמטיקה, היא קיומם של חסרים רבים ומשמעותיים בידע האריתמטי שהם מביאים אתם לחטיבת הביניים. אין בכוונתנו להתעלם מן התופעה; טשטוש של חומרת המצב השורר מבחינה זו בהקבצות נמוכות (ולא רק בהן) בחטיבת הביניים ואף בחטיבה העליונה, יהיה משום חטא לאמת. בדו"ח זה הבאנו מספר דוגמאות לקשיים בפעולות חשבון בסיסיות ובשברים. אמנם, ראוי לחזור ולהדגיש כי חסרים אריתמטיים אינם נחלתם של כל תלמידי ההקבצות הנמוכות, מאחר שישנם תלמידים לא מעטים המסווגים להקבצות אלה לא בשל אי שליטה בחומר של שנים קודמות כי אם בשל בעיות התנהגות, יכולת ריכוז נמוכה וסיבות אחרות. בכל זאת, התמונה הכללית בה עשוי להיתקל מורה בכיתת רמה ג' "ממוצעת", היא תמונה בעייתית מבחינת מיומנויות חישוב בסיסיות. כפי שאנו רואים זאת, אחת השאלות המרכזיות בהקשר למצב המתואר היא, באיזו מידה יש להשלים עם הפיכתן של בעיות בחשבון למחסום בלתי עביר. התייחסנו לשאלת המחסום האריתמטי מספר פעמים במהלך הדו"ח. אנו מוטרדים מן האפשרות של התקבעות הדעה, כי כתוצאה ממצב זה של אריתמטיקה לקויה, אי ההצלחה בתיכון ובבחינת הבגרות היא בלתי נמנעת. אכן, תחזית זו עלולה להתגשם אם המערכת שמה דגש מרובה מדי על פערים בחשבון והופכת אותם למוקד הקושי. במילים אחרות, מורה הנענה לתחושתו שתלמידיו "אינם מסוגלים לכלום" משום שאינם שולטים בפעולות החשבון, ומסיק שהם גם לא יוכלו לחשוב ולהתמודד עם נושאים מתמטיים מורכבים יותר, קרוב לודאי גוזר עליהם כישלון ידוע מראש. אנו מוצאים לנכון לחזור בסיכום זה על דברים שאמרנו בפרק הממצאים הראשון: מבלי לזלזל במטרה החשובה של הקניית ידע בסיסי בחשבון, שאין אנו כופרים בנחיצותו, לדעתנו לא רצוי לעכב את התקדמותם של תלמידים בהכרת מושגים מתמטיים מורכבים יותר, עד שתושג שליטה הולמת באריתמטיקה. התרשמותנו היא כי גם תלמידים המתקשים בפעולות חשבון מסוגלים (ויותר מכך, מעונינים!) לעסוק במשימות המערבות חשיבה מתמטית מסדר גבוה יותר. ניתן להתמודד עם הפערים האריתמטיים בעזרת שימוש במחשבון, תוך שיפור מיומנויות החשבון במקביל, ולא כתנאי מוקדם, להוראת מושגים ותהליכים מתמטיים. יתרה מזאת, גם טיפול מקביל זה בבעיות אריתמטיות יכול להיעשות בגישה שאנו תומכים בה להוראת כלל הנושאים המתמטיים עבור תלמידים חלשים: גיוס השכל הישר של התלמידים, שימוש בהמחשות ויזואליות ובשיקולים אינטואיטיביים, וטיפוח כלים לבקרה. השערתנו היא, כי מקורם של

החסרים האריתמטיים אצל התלמידים החלשים עשוי להיות נעוץ באותה גישה של "קידוש השיח הפורמלי" שהזכרנו קודם, עוד בבית הספר היסודי. החתירה ליישום שוטף של רוטינות והדגשת השאלה "איך עושים" כאשר היעד הוא פתרון מספר רב של תרגילים, עלולה לגרום, לפחות אצל חלק מן הילדים, לנתק מן השכל הישר והמשמעות. לכן, כאמור, אנו מציעים לטפל בבעיות של מיומנויות חשבון הצצות תוך כדי הנושאים המתמטיים בחטיבת הביניים, על ידי התייחסות ad-hoc לכל בעיה כזו בהתאם לצורך המזדמן, בשיטות המנצלות עד כמה שניתן את ההגיון של התלמידים. בפרק החמישי של הדו"ח הבאנו דוגמא לטיפול כזה, כאשר תוך כדי העבודה על משוואות ישרים התברר כי התלמידים מתקשים בביצוע חיבור וחיסור של מספרים שאחד מהם שלילי. נעם, למשל, התקשה בשאלה "כמה יש להוסיף ל- 65- על מנת לקבל 35" (עמ' 103 לעיל). שרטוט של ציר המספרים ומיקום המספרים 65- ו- 35 על גבי הציר, המחישו לנעם באופן מיידי את הפעולה שעליו לבצע. באופן כזה של התייחסות לחסרים באריתמטיקה, לא נבלמת ההתקדמות בחומר השוטף, ועשוי להתאפשר שיפור, ולו מועט, של המיומנויות החשבוניות.

4. הרגלים התנהגותיים ומאפיינים אַפקטיביים של תלמידים חלשים: תפקיד המורה כמעצב שינויים התנהגותיים ברמת הפרט וברמת הכיתה.

בחלקים שונים של הדו"ח התייחסנו להתנהגויות של תלמידים חלשים, הן במסגרת אינטראקציות "אחד על אחד" והן תוך כדי שיעורי המתמטיקה. אחת ההתנהגויות הבולטות עליהן עמדנו, היא הנטייה של תלמידים חלשים לענות לשאלות המופנות אליהם, תשובות ספונטניות הנשלפות באופן מיידי וללא פסק זמן למחשבה. דנו במקור אַפקטיבי אפשרי להתנהגות זו: התלמיד או התלמידה מצפים, על סמך התנסויות קודמות, שאם יטעו המורה תתקן אותם או תשאל מישהו אחר ולכן למעשה אין להם סיבה להתאמץ ולהשקיע מחשבה בתשובתם. ראינו במספר דוגמאות, כי כאשר המורה או המראיינת התעקשו להחזיר את האחריות לתשובה לידי התלמידים, לעתים קרובות הושקע מאמץ במחשבה שניה וניתנה תשובה בעלת משמעות. מורים המודעים לתופעה זו עשויים לחולל שינוי הדרגתי בהרגלי התלמידים, וזאת במספר רמות התייחסות:

ברמה הבסיסית ביותר, ניתן "להחזיר את הכדור" לידי תלמיד או תלמידה שהשיבו תשובה שגויה, בעזרת תגובה פשוטה הנותנת הזדמנות לחשיבה נוספת, כפי שראינו כאשר המורה או המראיינת הגיבו ב"היתכן?", או חזרו על התשובה בנימת שאלה ("חודש, מה- 23.10 עד ה- 31.10?"), או לחילופין הצביעו בפני התלמיד על בעיה בתשובתו, מבלי לתקנה.

ברמה עמוקה יותר, יכולה המורה להתייחס לתשובות סתמיות או קטועות כאל מנוף להמשך העיסוק בנושא, כאשר היא משקפת את התשובה ו"ממשיכה" אותה לכיוונים רצויים, גם כשברור שלא לגמרי לכך היתה כוונת המשיב (בנוסח "אולי התכוונת ש...").

במקרה כזה המורה, במתכוון, נותנת למשיב קרדיט אולי מעבר למגיע לו, על מנת ליצור מתוך תשובתו בסיס להמשך הלמידה, ולעודד אותו להמשיך להיות מעורב בתוצאה של דבריו. ראינו דוגמא לכך בהתייחסותה של המורה שלימדה פונקציות בכיתה ט׳, אל "סיפור הילד ההולך לשוק" שחיברה התלמידה ל. (ראה עמ׳ 94 לעיל): ראשית, למרות שלמעשה ל. לא ענתה על דרישת שיעורי הבית והציגה רק התחלה של סיפור (וזהו מאפיין נוסף של תלמידים חלשים שעמדנו עליו בסקירת הספרות), המורה לא דחתה את הסיפור בדרישה שעל התלמידה להשלים את המטלה תחילה, כי אם הובילה את הכיתה יחד עם ל. להשלמת הסיפור בטבלה, תבנית וגרף. שנית, כשהתבקשה ל. לומר מתי יגיע הילד לשוק, כלומר מהו התחום הנתון בסיפור, השיבה תשובה סתמית - "כשהוא יגיע". המורה, בהמשך הדברים, שיקפה תשובה זו במילים "השוק נמצא במקום רחוק מאד כנראה", כלומר לא התייחסה לכוונה הסתמית הגלומה בתשובה אלא אימצה כוונה יותר משמעותית (המרחק רב). המורה המשיכה במטלה על ידי השאלה "בואו נחליט, אחרי כמה שעות הוא מגיע לשוק?". בדרך זו ל. יחד עם יתר התלמידים יצרו את הפונקציה, כאשר לא נשללה מהתלמידה זכות ה"בעלות" על סיפור שהפך לנושא השיעור.

ברמה הבאה של טיפוח אחריות הלומדים על תוצאות עבודתם, ולא משנה באילו דרכים הושגו תוצאות אלה (פרוצדורה שנלמדה, ניחוש, הפעלת שכל ישר, דרך ויזואלית), נציין את תפקיד המורה כמעודד בקרה. בין אם התשובה שניתנה היא שגויה או חלקית במידה זו או אחרת, ובין שהיא נכונה, אנו רואים חשיבות בכך שהמורה ישאל ויתמוך בשאלות כמו "כיצד נוכל לדעת אם צדקנו?, "באיזו דרך נוכל לבדוק" וכדומה. התלמידים יכולים להתלבט בשאלות אלה, במקום, או לכל הפחות בטרם שהמורה יספק ישירות את הכלי לבדיקה. דוגמא לכך ראינו במהלך השיעור בגיאומטריה אנליטית על משוואות ישרים בכיתת י׳ מב"ר (עמ׳ 102 לעיל). לאחר שהוצעו על ידי תלמידים שונים שלוש אפשרויות לתשובה על שאלה מסוימת, רשמה המורה את ההצעות על הלוח ושאלה - איך נוכל לדעת מי מן ההשערות נכונה? מאחר שניתן מספיק זמן להתלבטות, והמורה לא סיפקה בעצמה את הכלי לבדיקה, הגיע כלי זה בסופו של דבר מאחד התלמידים ויושם על ידי יתר הכיתה. כאשר דבר זה אינו מתרחש (ואפשר לצפות לכך במקרים מסוימים), תפקידו של המורה הוא לתת את הכלים לבקרה ולהביא את התלמידים ליישומם.

מעבר לכל הנאמר עד כה, חשוב להתבונן בנושא של התייחסות מורים לתשובות תלמידיהם גם מפרספקטיבה קוגניטיבית תיאורטית. בסקירת הספרות, ולכל אורך הדו"ח, הזכרנו את עבודתם של סמית׳ ושותפיו (Smith, diSessa & Roschelle, 1993), ששימשה לנו כנקודת מוצא. על פי חוקרים אלה, יש להתייחס לתפיסות מוטעות של תלמידים לא כאל מכשול, אלא כאל גרעין שעליו ייבנה ידע חדש, "נכון" ורחב יותר. אכן, ראינו דוגמאות בחלקי הדו"ח השונים לתשובות שגויות שהיה בהן גרעין של נכונות, כמו למשל תשובתה של נאוה לגבי אמצע קטע (עמ׳ 81). לגישה זו, כי ניתן למצוא לעתים קרובות אלמנטים של

נכונות בשגיאות של תלמידים, יש גם השלכות אפקטיביות. נראה כי לא נגזים אם נאמר, שתלמידים חלשים רגילים לטעות לעתים תכופות. רבים מהם חווים תחושה של כישלון מתמיד במתמטיקה. חזן (Chazan, 2000), כפי שצוין בסקירת הספרות, עמד על כך שבמערכת הבית ספרית, תלמידים שאינם מייצרים תשובות נכונות, ולא משנה מאיזו סיבה, מתוייגים כבעלי יכולת נמוכה. תלמיד שקיבל על עצמו את תג היכולת הנמוכה, התרגל למעשה לכך ששרשרת של מורים שפטו אותו בעבר כחלש, וכתוצאה, אין לו כל עניין לשתף את המורה בחשיבה שלו. מורה המסוגל לעמוד על גרעין של נכונות בתשובת תלמיד, להדגיש גרעין זה ולפתחו לכיוונים רצויים תוך הענקת משוב תומך, עשוי לעשות בכך צעד משמעותי לשיפור המוטיבציה של התלמיד. באופן כללי, כבר ציינו כי תלמידים חלשים זקוקים במיוחד למשוב ותשומת לב אישית, כפי שעולה מעבודתו של חזן וממחקרים אחרים שסקרנו, כמו גם מהתנהגויות תלמידים שדווחו בממצאינו. כאשר התלמיד נוכח, כי המורה אינו פוסל את תשובותיו ורעיונותיו אלא מתייחס אליהם ברצינות, גם אם אינם נכונים באופן מלא, יש יותר סיכוי שבעתיד התלמיד יירתע פחות מלבטא את מחשבותיו. נקודה זו היא גם המפתח לקיום דיון כיתתי, אשר, לדברי חזן, אחת המכשלות הבולטות בהשגתו היא הפקפוק שיש לתלמידים הן לגבי עצמם והן לגבי חבריהם לכיתה, החלשים כמותם, בהקשר לאפשרותם לומר משהו בעל משמעות. בפרק החמישי של דו"ח זה ראינו כיצד שלוש מורות בכיתות חלשות עודדו וטיפחו השתתפות של תלמידים תוך דגש על התקדמות בהבנת המושגים הנלמדים ולא על תיקון שגיאות. (ראוי לומר כאן - כפי שכבר אמרנו זאת קודם - כי אין הכוונה לכך שרעיונות שגויים יישארו לא מטופלים, אלא שההתייחסות לעצם השגיאה היא שונה, הן מבחינה קוגניטיבית והן מבחינה דידקטית).

5. מאפיינים של מורים המתאימים ללמד מתמטיקה בכיתות של תלמידים חלשים.

מכל האמור עד כה בסיכום זה עולה, כי בהוראת מתמטיקה לתלמידים חלשים יש לתת את הדעת על המאפיינים של למידתם וחשיבתם, מאפיינים השונים בטיבם ו/או בממדיהם מאלה של תלמידים חזקים יותר. ראינו כי מודעות של המורה לצרכים ולבעיות של תלמידים אלה עשויה להביא ללמידה טובה יותר ולניצול טוב יותר של יכולותיהם. אנו סבורים כי מורה מתאים להוראת תלמידים חלשים הוא מורה המאמין ביכולות אלה ושואף להוציאן מן הכוח אל הפועל. בנוסף, דרוש למורה ידע מתמטי עמוק שיאפשר לו להפיק מתוך תשובותיהם של תלמידים גם את הגרעין הנכון שאפשר להתבסס עליו, וגם את מוקדי הבעיות שיש לטפל בהן. ברם, יש מקום לחשש כי בתוך בתי הספר, הקבצות של תלמידים חלשים עלולות לקבל כוח הוראה מתאים פחות, משום שאת כוח ההוראה הטוב יותר נוטים מקבלי ההחלטות לשבץ להקבצות חזקות. בסקירת הספרות הזכרנו את הדו"ח שהוציא המרכז האמריקאי לסטטיסטיקה בחינוך (National Center for Education Statistics, 1996),

המדווח כי תלמידים בהקבצות נמוכות במתמטיקה או בכיתות המאוכלסות בתלמידים המוגדרים חלשים, מקבלים לעתים קרובות יותר מורים שתחום התמחותם אינו מתמטיקה. עוד ציינו מספר מחקרים המראים כי תלמידים חזקים או כאלה הלומדים בהקבצות גבוהות, זוכים בדרך כלל להוראה שהיא לא רק רבה יותר מבחינת כמות השעות כי אם גם טובה יותר מבחינת האיכות. תופעה זו נפוצה גם בארץ, אם כי אין לנו נתונים בדוקים על כך מעבר למדגמים מקריים. אפשר להבין מנהל בית ספר אשר, בהערכה מציאותית של כוח ההוראה העומד לרשותו, ינתב את המורים הנחשבים לטובים יותר להקבצות החזקות, בלחץ ההורים והדרישות של המערכת הכוללת. אולם, חשוב להכיר בכך שקידום אוכלוסיות חלשות מחייב מורים בעלי רקע מתמטי ופדגוגי מתאים, ובנוסף לכך - ולא פחות חשוב - בעלי רצון לשפר את הדימוי וההישגים של התלמידים.

בשאלונים שהעברנו לעשרים וארבעה מורים למתמטיקה שהשתתפו בהשתלמות של אגף שח״ר מצאנו, כי בעוד שכמעט מחצית מהם הביעו מוטיבציה רבה ללמד בכיתות חלשות וראו בכך שליחות ואתגר, כשליש המורים נימקו את היותם משובצים בכיתות חלשות בנימוקים מסוג ״אני מורה חדש וזה מה שנתנו לי״ או ״לא מצאתי עבודה בכיתות יותר טובות״. אם זהו המצב בקרב מורים הבאים להשתתף בהשתלמות מיוחדת על תלמידים חלשים, כלומר אוכלוסיית מורים עם הטייה לכיוון של מוטיבציה, יש יסוד לשער שהתמונה בקרב כלל המורים למתמטיקה בכיתות חלשות בארץ היא אף עגומה יותר. השאלה מהו הפרופיל של מורי תלמידים חלשים במתמטיקה, מבחינת השכלה, ניסיון, ומוטיבציה לקדם את התלמידים, היא שאלה הנותרת פתוחה למחקר נוסף.

סוף דבר:

אנו סבורים כי יש צורך בשינוי מהותי בגישת מערכת החינוך כלפי תלמידים חלשים במתמטיקה. לתלמידים אלה יכולות לא מעטות שאינן מנוצלות, וניתן לעשות רבות למענם. הדו״ח שלפנינו אמנם אינו ממצה עד תום את הדיון בסוגייה המורכבת של התלמידים החלשים, אך הממצאים מאפשרים לסכם כי:

- מן הראוי לא להיסחף לפתרונות קלים של בעיית הכישלונות במתמטיקה בקרב תלמידים המוגדרים על ידי המערכת כ״חלשים״. פתרונות כאלה נעים בין האלטרנטיבה של ״מתמטיקה מדוללת״ המתמקדת במיומנויות בסיסיות בלבד, לבין ההצעה ״בואו נפטור אותם ממתמטיקה בכיתה ט׳״. בעקבות הנאמר בדו״ח זה, אנו טוענים כי שתי האפשרויות הללו אינן מבוססות אלא על עשיית חיים קלים לעצמנו, תוך העמקת פערים חברתיים ותרבותיים והתעלמות ממה שניתן להפיק ממחקר המזהה ומפרש את הקשיים והיכולות, ומנסה להצביע על הצעות לפעולה.

- יש לחתור להכשיר מורים שמומחיותם היא הוראת תלמידים חלשים. הכרחי הוא שמורים כאלה יהיו בעלי רקע מתמטי מוצק ביותר, יכירו ממצאי מחקר וגישות מן הסוג המתואר בדו"ח זה (ובמקורות אחרים), ויעבדו על פי חומרי למידה מתאימים שנבנו באופן מודע ומפורש בהתאם ליכולות התלמידים.
- מאחר שישנן הוכחות קיום לכך שניתן להביא יותר תלמידים לרמה של בחינת הבגרות (לפחות 3 יחידות), אסור להשלים עם מצב בו תלמידים כה רבים אינם מגיעים לשלב זה. בדו"ח הנוכחי ניסינו להציג ממצאים שיסייעו בהפרכת הטענה האליטיסטית, כי מתמטיקה נועדה רק ליחידי סגולה. כשמדובר במתמטיקה גבוהה, אזי אכן יש טעם לחשוב שההבנה שמורה למומחים בדבר בלבד, קרי, המתמטיקאים. אולם, בהתייחס לתכנים המופיעים במבחן בגרות ברמת שלוש יחידות, אנו טוענים - ודו"ח זה נועד להתחיל בביסוס טענה זו - כי תלמידים רבים יותר יכולים לעמוד בכך. כפי שדו"ח זה מדגים, השלב של חטיבת הביניים אינו מאוחר מדי מכדי להתחיל לטפל בקידום תלמידים חלשים במתמטיקה, במטרה לנסות ולהביא אותם לעמידה מכובדת בדרישת בחינת הבגרות, המהווה במציאות שלנו מפתח חברתי וכלכלי חשוב מכדי להזניחו.

מחברי דו"ח זה אינם רואים בו סוף פסוק. אנו מזמינים את קוראי הדו"ח ואת מקבלי ההחלטות במשרד החינוך להמשיך ולהעמיק את המעורבות בקידום תלמידים חלשים בשיטות חדשות.

ביבליוגרפיה.

בוהדנה, ר. והדס, נ. (2002). **אוגדן למורי מתמטיקה בכיתה ח'**. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

הרכבי, א. (1999). **"תלמידים חלשים במתמטיקה - סיכום מחקר"**. דו"ח מוגש למשרד החינוך. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. (העתקים ניתן להשיג ישירות מהמחבר).

הרכבי, א. (2000). **אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב)**. דו"ח ראשוני, מוגש למשרד החינוך. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. (העתקים ניתן להשיג ישירות מהמחבר).

קרסנטי, ר. (2001). **מתמטיקה, שנים לאחר בחינת הבגרות: אפיונים קוגניטיביים ואפקטיביים של היזכרות במתמטיקה אצל מבוגרים**. חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה, ירושלים: האוניברסיטה העברית.

קרסנטי, ר. והרכבי, א. (2001). **אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב)**. דו"ח פעילות לשנת 2001, מוגש למשרד החינוך. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. (העתקים ניתן להשיג ישירות מהמחברים).

נאסר (אבו אחמד), ס. (2000). **מאפייני פתרון של תלמידים בעלי הישגים נמוכים הלומדים אלגברה בגישת הפונקציה עם טכנולוגיה**. עבודת גמר לקבלת תואר מוסמך, אוניברסיטת חיפה.

Arcavi, A., Hadas, N. & Dreyfus, T. (1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. In J. P. da Ponta & J. F. Matos (Eds.), **Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Vol 2, pp.280-287). Lisbon: University of Lisbon.

Artigue, M. (1992). Didactic engineering. In R. D. Douady, & A. Mercier (Eds.), **Research in Didactics of Mathematics** (pp. 41-65). Grenoble: Le Pensée Sauvage.

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Lynchevski, L. & Sfard, A. (In press). Doing wrong with words, or what bars students' access to arithmetical discourses. To appear in Journal for Research in Mathematics Education.

Brophy, J. E. (1983). Research on the self-fulfilling prophecy and teacher expectations. **Journal of Educational Psychology**, **75**, 631-661.

Chazan, D. (1996). "Algebra for All Students?". **Journal Of Mathematical Behavior**, **15**, 455-477.

Chazan, D. (2000). **Beyond Formulas in Mathematics and Teaching: Dynamics of the High School Algebra Classroom**. New York: Teachers College Press.

Clement, J. (1982). Students' preconceptions in introductory mechanics. **American Journal of Physics**, **50**, 16-30.

Cooper, B. & Dunne, M. (2000). **Assessing Children's Mathematical Knowledge**. Buckingham: Open University Press.

Davis, R. B. (1984). **Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education**. London: Croom Helm.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representation expertise in children. **Journal of Mathematical Behavior**, **10**, 117-160.

Gravemeijer, K. P. (1998). From a different perspective: Building on students' informal knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space (pp. 45-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hativa, N. (1988). Computer-based practice in Arithmetic: Widening the gap between high- and low-achieving students. **American Educational Research Journal**, **25**, 366-399.

Herndon, J. (1971). **How to Survive in Your Native Land**. New York: Simon and Schuster, Inc.

Hewson, P. W. & Hewson, M. A. G. (1984). The role of conceptual conflict in conceptual change and the design of science instruction. **Instructional Science**, **13**, 1-13.

Jacobs, H. R. (1979). **Elementary Algebra**. San-Francisco: W. H. Freeman and Company.

Kaput, J., & Sims-Knight, J. (1983). Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, **5** (3 & 4), 63-78.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. **American Educational Research Journal**, **27**, 29-63.

Lave, J. (1988). **Cognition in Practice**. Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). **Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation**. Cambridge: Cambridge University Press.

Magidson, S. (1999). **Beyond Alphabet Soup: Making Algebra Make Sense**. Workshop presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), San Francisco, CA.

Martin, D. B. (2000). **Mathematics Success and Failure Among African American Youth: The Roles of Sociohistorical Context, Community Forces, School Influence, and Individual Agency**. Mahwah, New Jersy: Lawrence Erlbaum Associates.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. **Journal of Mathematical Behavior**, **3** (1), 93-166.

Mayes, R. L. (1992). The effects of using software tools on mathematics problem solving in secondary schools. **School Science and Mathematics**, **92** (5) 342-248.

McCloskey, M., Caramazza, A. & Green, B. (1980). Curvilinear motion in the absence of external motion: Naive beliefs about the motions of objects. **Science**, **210**, 1139-1141.

McRobbie, C., Baturo, A. & Cooper, T. (2000). Low-achieving mathematics students' attitudinal and achievement changes as a result of using an integrated learning system. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), **Mathematics Education Beyond 2000: Proceedings of the Twenty-third Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA-23)** (pp.424-431). Fremantle, Western Australia: MERGA.

Metz, M. H. (1978). **Classrooms and Corridors: The Crisis of Authority in Desegregated Secondary Schools**. Berkeley: University of California Press.

Mevarech, Z. R. (1993). Who benefits from cooperative computer-assisted instruction? **Journal of Educational Computing Research**, **9** (4), 451-464.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1984). **Qualitative Data Analysis: A Sourcebook of New Methods**. Newbury Park, CA: Sage.

Moses, R. P. & Cobb, C. E. (2001). **Math Literacy and Civil Rights**. Boston: Beacon Press.

National Center for Education Statistics (1996). **Out-of-Field Teaching and Educational Equality**. Technical Report No. 96-040, Washington D.C.: U.S. Department of Education.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993**). Street Mathematics and School Mathematics**. New York: Cambridge University Press.

Page, R. N. (1991). **Lower-Track Classrooms: A Curricular and Cultural Perspective**. New York: Teachers College Press.

Peterson, P. L. (1988). Teaching for higher order thinking in mathematics: The challenge for the next decade. In D. A. Grows, & T. J. Cooney (Eds*.),* **Perspectives on Research on Effective Mathematical Learning** (vol. 1, pp. 2-26). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Philipp, R. A. (1992). A study of algebraic variables: Beyond the student-professor problem. **Journal of Mathematical Behavior**, **11** (2), 161-176.

Raudenbush, S.W., Rowan, B. & Cheong, Y.F. (1993). Higher order instructional goals in secondary schools: class, teacher and school influences**. American Educational Research Journal**, **30**, 523-555.

Resnick, L. (1983). Mathematics and science learning: a new conception. **Science**, **220**, 477-478.

Reyes, L. H. & Stanic, G. (1988). Race, sex, socioeconomic status, and mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, **19**, 26-43.

Rosnick, P., & Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. **Journal of Mathematical Behavior**, **3** (1), 3-27.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. **Educational Studies in Mathematics**, **46**, 13-57.

Shepard, L. (1991). Psychometricians' beliefs about learning. **Educational Researcher**, **20** (7), 2-9.

Smith, J. P. (1990). **Learning rational numbers**. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

Smith, J. P. III, diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. **The Journal of the Learning Sciences**, **3** (2), 115-163.

Solomon, J., & Nemirovsky, R. (In press). Mathematical Conversations. In D. W. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), **Videopapers in Mathematics Education**. Journal for Research in Mathematics Education Monograph.

Stake, R. E. (1994). Case studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), **Handbook of Qualitative Research** (pp. 236-247). Thousand Oaks, CA: Sage.

Sutherland, R. (1993). Consciousness of the unknown. **For the Learning of Mathematics**, **13** (1), 43-46.

Yadrick, R. M., Regian, J. W., Robertson-Schule L. & Gomez, C. C. (1996). Interface, instructional approach, and domain learning with a mathematics problem-solving environment. **Computers in Human Behavior**, **12** (4), 527-548.

Yair, G. (1997). Teachers' polarisation in heterogeneous classrooms and the social distribution of achievements: An Israeli case study. **Teaching and Teacher Education**, **13** (3), 279-293.

Zohar, A., Degani, A., and Vaaknin, E. (2001). Teachers' beliefs about low achieving students and higher order thinking. **Teaching and Teacher Education**, **17**, 469-485.