האנלוגיה בין המישור למרחב:
מה נכון ומה לא נכון

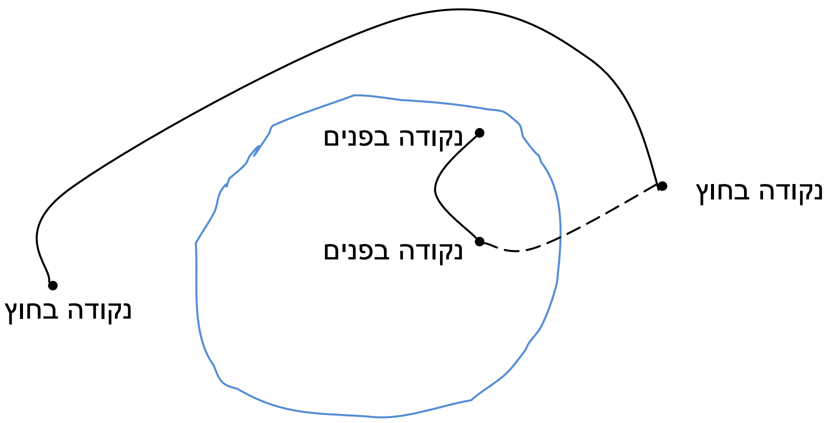
מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחווה

האנלוגיה, או קו טיעון **דומה** (אבל **לא זהה**) בין מישור למרחב, מושתתת על מספר עקרונות ומספר עובדות שהם בסיס לפיתוח תובנות אלו. על מנת להבין מהם קווי הדמיון ומהו השוני בין מושגים במישור ומושגים מקבילים להם ובמרחב, חשוב להכיר כיצד נבנית ההתאמה הזאת בין המושגים.

1. נתחיל מצורות במישור ונחפש מה מקביל להם במרחב.

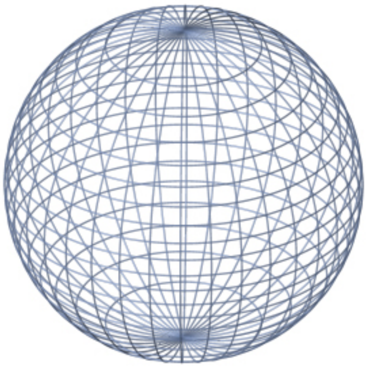
צורה גיאומטרית במישור יכולה להיות כל דבר: נקודה, קו, משולש, צורה כלשהי ללא השתייכות לקבוצה כלשהי. אבל כאשר אנו מדברים על צורות במישור אנחנו נוטים לדמיין קו סגור ותחום שנוצר בתוכו, התחום הפנימי שלו.

במרחב ניתן גם לשרטט קו סגור, אבל הוא עדיין לא מאפשר לדבר על תחום פנימי. ניקח, למשל, טבעת או חישוק, במילים אחרות – מעגל במרחב, ונשווה אותו עם מעגל במישור.

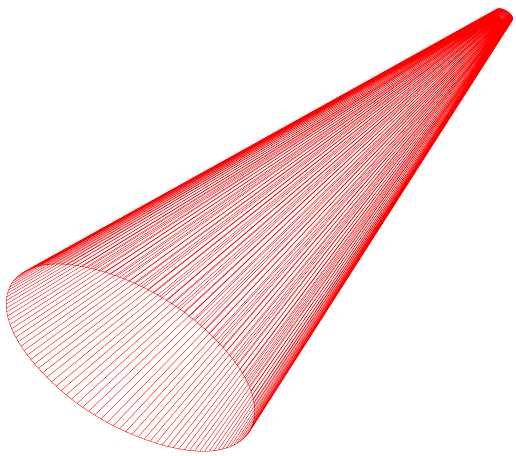


המעגל במישור יוצר תחום פנימי שנקרא עיגול. לפעמים אנחנו מחשיבים עיגול יחד עם המעגל שיוצר אותו ולפעמים ללא המעגל – זה לא ממש חשוב כעת. מה שחשוב הוא שמעגל במישור יוצר שני תחומים - פנים וחוץ: כל שתי נקודות בפנים אפשר לחבר בקו מבלי לחתוך את המעגל, וכך גם כל שתי נקודות בחוץ, אבל אם נרצה לחבר נקודה בפנים עם נקודה בחוץ – קו המחבר בין שתי נקודות אלה תמיד יחתוך את המעגל, וזה נכון, כמובן, לכל קו סגור במישור.

לעומת זאת, אם נתייחס לחישוק, כלומר, לדוגמה של קו סגור במרחב – כל שתי נקודות במרחב אפשר לחבר בחוט מבלי לגעת בחישוק! במילים אחרות, חישוק או קו סגור אחר במרחב לא מחלק את המרחב ל"פנים" ו"חוץ". במובן זה המקביל שבמרחב לקו סגור במישור הוא **משטח סגור.** כך למשל, כדור הוא משטח, והוא בוודאי מחלק את המרחב לשני תחומים.


[1]

כדאי לדעת שגם במישור וגם במרחב הצורה יכולה להיות אין-סופית. כך למשל, כל זווית מחלקת מישור לשני תחומים, ואם לא מדובר בזווית שטוחה, אפשר להבחין בין תחומה הפנימי לתחומה החיצוני. גם במרחב אפשר ליצור צורה אין-סופית, למשל, "חרוט ללא תחתית":



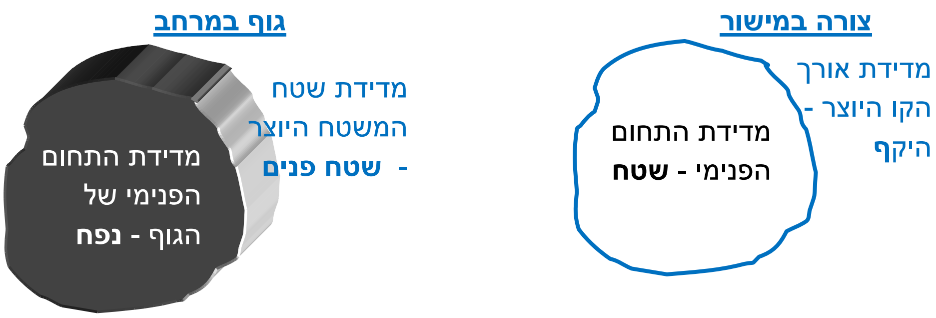
אנחנו נראה גוף במרחב כהקבלה לצורה במישור, כאשר בדומה למקרה של מישור, גוף יכול לכלול או לא לכלול את המשטח היוצר אותו, אבל חשוב שיש לו פנים – התחום הפנימי שלו, וחוץ, והאבחנה

דומה לזו של המישור: שתי נקודות שאפשר לחבר בחוט מבלי שהחוט יחתוך את המשטח נמצאות בפנים או בחוץ, ואי אפשר לחבר בחוט שתי נקודות כאשר אחת מהן בפנים, והשנייה – בחוץ.

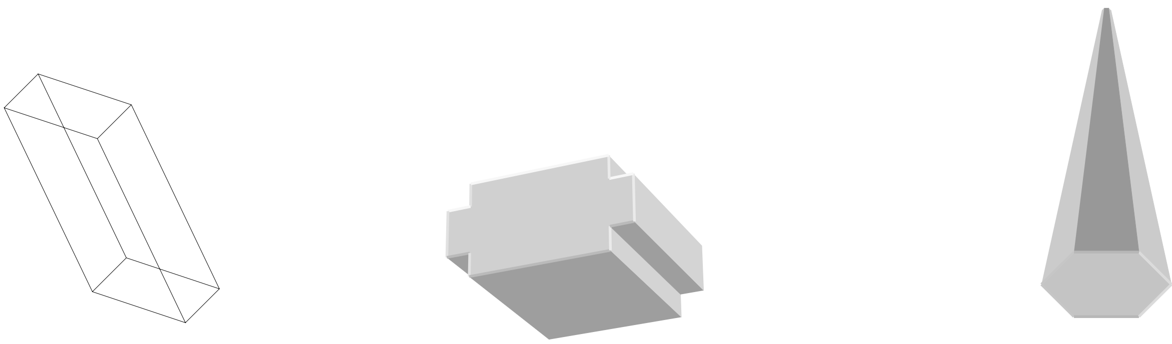
---

[1] מקור התמונה: http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5:Sphere-wireframe.png

2. **כאשר אנחנו מודדים צורות גיאומטריות במישור, אנחנו מודדים את ההיקף שלהן,** שהוא אורך הקו הסגור היוצר אותן, ואת השטח של התחום הפנימי שלהן, לפי כללי מדידת אורך ושטח אפשר במרחב למדוד אורכי קווים, אבל המקבילות למדידות היקף ושטח של צורה הן שטח הפנים של הצורה, כלומר, שטח המשטח היוצר אותה, והנפח שלה – תוצאת מדידת התחום הפנימי שלה:



3. קבוצה מאד מיוחדת של צורות במישור היא קבוצת **מצולעים.** על מנת לקבוע מצולע במישור מספיק לקבוע את הקדקודים שלו ואת הצלעות שלו – קטעים בין הקדקודים, שכן להזכירכם, מצולע הוא קו שבור סגור. גם במרחב אפשר ליצור קו שבור, אבל כפי שכבר ראינו, לאו דווקא נקבל גוף. על מנת לקבל גוף, יש ליצור **משטח.** משטחים (וגם גופים) במרחב המקבילים למצולעים במישור נקראים **פאונים.** פאון הוא משטח שנוצר על ידי נקודות שהן ה**קדקודים** שלו, קטעים בין הקדקודים שהם ה**מקצעות** שלו, ומצולעים הנוצרים על ידי המקצעות שהם ה**פאות** שלו. בשרטוטים מיוצגות כמה דוגמאות של פאונים:

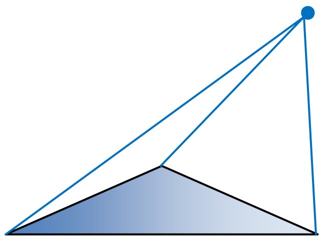


בדומה למצולעים, שלא יכולים להיווצר על ידי כל קו אחר פרט לקו שבור, הפאונים לא יכולים להיווצר על ידי חלקי משטח אחרים פרט למצולעים.

4. **שיקולי מדידות נמצאים בבסיס אנלוגיה חשובה נוספת.** במישור (ניזכר בכללי מדידת שטח) קיימת צורה אחת ויחידה ששטחה נתקבל ממכפלת המידות שלה, והיא **מלבן.** כדי למדוד שטח של כל צורה אחרת צריך לבצע מדידות נוספות או חישובים נוספים. הגוף האחד והיחיד

במרחב שנפחו מתקבל על ידי מכפלת המידות שלו הוא **תיבה**, והמשטח אשר יוצר אותו נוצר על ידי מלבנים.

5. **המשולש הוא המצולע "הקטן ביותר" במישור, כאשר הכוונה היא**, כמובן, לא לגודל אלא למספר קודקודים: בגיאומטריה אוקלידית של מישור לא קיים מצולע שיש לו פחות משלושה קדקודים. בדומה לו, פירמידה משולשת היא הפאון ה"הקטן ביותר": יש לה ארבעה קדקודים, וארבע פאות שהן משולשים. פירמידה משולשת נוצרת אם לוקחים משולש ומחברים כל אחד מקדקודיו לקדקוד רביעי שלא נמצא במישור שבו נמצא המשולש:



לא קיים פאון במרחב שלו פחות מארבעה קדקודים, וכל פאון בעל ארבעה קדקודים הוא בהכרח פירמידה משולשת.

6. **ידוע שקיימים אין-סוף מצולעים משוכללים.** להזכירכם, מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות ביניהן וגם כל זוויותיו שוות ביניהן. לכל מספר של צלעות קיים מצולע משוכלל בעל מספר צלעות זה: משולש משוכלל, מתומן משוכלל, אפילו מצולע משוכלל בעל 100 צלעות. טבעי כמובן לצפות שבדומה למצולעים במישור, קיימים פאונים משוכללים במרחב, אך מספר הדרישות מפאון משוכלל גדול יותר מאשר דרישות ממצולע משוכלל: פאונים משוכללים הם פאונים שכל הפאות שלהם חופפות ביניהן, וכל המקצועות שלהן שווים ביניהם. יתרה מזאת, כדי שהפאון יהיה משוכלל, מכל קדקוד שלו צריכים לצאת אותו מספר של מקצועות.

מסתבר, שהדמיון המצופה אינו מתקיים: לא קיים מספר אין-סופי של פאונים משוכללים, מספרם קטן מאד. קיימים רק חמישה פאונים משוכללים הנקראים הגופים האפלטוניים. גם אם נוריד מספר הדרישות ולא נרצה שכל הפאות תהינה חופפות ביניהן אלא נאפשר פאות משני סוגים, גם אז לא נקבל מספר אין-סופי של פאונים (הנקראים "גופים משוכללים למחצה", או "גופים ארכימדיים").

זוהי דוגמה שחשוב להכיר אותה של חוסר דמיון בין מישור למרחב.

7. מעגל הוא קו מיוחד במישור, משתי סיבות עיקריות:

- כל הנקודות על מעגל נמצאות במרחקים שווים מנקודה אחת מיוחדת הנקראת **מרכז** המעגל – זוהי למעשה הגדרתו.
- למעגל תכונה ייחודית. מסתבר שלתכונה זו חשיבות רבה מאד במתמטיקה, והיא: **מבין כל הקווים הסגורים בעלי אותו אורך (היקף - לפעמים אומרים "קווים שווי היקף") הוא יוצר צורה ששטחה הוא הגדול ביותר.**

במרחב יש מספר גופים הדומים למעגל, כמו, למשל, גליל מעגלי או חרוט מעגלי – אלה דוגמאות לגופי סיבוב. כדאי להיזכר בכך שראינו קודם דמיון בין חרוט (אין-סופי) לבין זווית במישור.

ואולם, אם נרצה לחפש גוף במרחב שגם לו יש תכונות הדומות לאלה של המעגל – זהו **כדור**, ומשטחו הוא **פני הכדור.**

פני הכדור הוא משטח במרחב שכל נקודותיו נמצאות במרחקים שווים מנקודה מיוחדת הנקראת מרכז הכדור – בדומה למישור, זוהי למעשה הגדרה של כדור ושל משטח היוצר אותו.

ובדומה למעגל, גם לכדור יש תכונה דומה המייחדת אותו בין כל המשטחים: **מבין כל הגופים בעלי אותו שטח פנים, לכדור הנפח הגדול ביותר.**