חוקי חשבון

מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחווה

כל אחת מארבע פעולות החשבון הבסיסיות מערבת שני מספרים שעליהם מתבצעת הפעולה, ומתאימה להם מספר שלישי שהוא תוצאת הפעולה. בשל כך פעולות אלה הן דוגמאות לפעולות **"בינאריות"** (binary): המילה הלועזית המתחילה ב- "bi- " מתאים למשמעות של מילה "כפול".

עם זאת, אנחנו רגילים לכך שרושמים כמה פעולות בזו אחר זו ללא תוצאות ביניים. צורת רישום זו מסתירה את הטבע הבינארי של הפעולות: על פניו, מעורבים בהן יותר משני מספרים. כך למשל, הרישום כמו

$$3+5+17+25$$

מערב ארבעה מספרים ולא שניים. כמובן שלא מדובר במקרה זה בפעולת חשבון חדשה או בפעולה שאיננה פעולה בינארית אלא בביצוע מספר פעולות חשבון בזו אחר זו: קודם מחשבים $3+5$, מקבלים את תוצאה: $3+5=8$, אליה מחברים את המספר הבא: $8+17$, וכך הלאה.

אפשר לשים לב שהרבה יותר נוח יהיה לחשב את סכום ארבעת המספרים האלה בסדר אחר, למשל, אם נחבר אותם כך:

$$\underbrace{3+17}_{20}+\underbrace{5+25}_{30}=50$$

כללי חשבון או חוקי חשבון מבהירים מתי מותר לעשות שינויי סדר דוגמת השינוי שעשינו ומתי – אסור. המשמעות של המילים "מותר" ו-"אסור" בהקשר זה היא "מתי שינוי הסדר ישפיע על התוצאה ומתי התוצאה איננה תלויה בשינוי הסדר".

חוק החילוף

שינוי הסדר הבסיסי הראשון הוא החלפת המקום של שני המספרים המשתתפים בפעולה, למשל, חישוב של 3+5 במקום 5+3. חוק המסדיר שינוי סדר זה נקרא **חוק החילוף** (בלועזית – commutative law) והוא חל אך ורק על פעולת חיבור ופעולת כפל:

לכל שני מספרים a, b נכון לרשום

$$a+b=b+a, \qquad a\times b=b\times a.$$

חוק זה בא לידי ביטוי בין היתר בשמות המספרים אשר משתתפים בפעולות החיבור והכפל בכך ששמות אלה אינם מבדילים ביניהם לפי סדר הופעתם: "מחוברים" בחיבור (תוצאת פעולת החיבור היא "סכום"), "גורמים" בכפל (התוצאה – "מכפלה"). להבדיל, חוק החילוף איננו מתקיים עבור פעולות חיסור וחילוק:

בדרך כלל, $a-b\neq b-a, \qquad a:b\neq b:a.$

"בדרך כלל", משום שבמקרה המיוחד שבו a=b,

$$a-b=b-a=0,$$
$$a:b=b:a=1 \qquad (a,b\neq 0).$$

אי קיום חוק החילוף, כלומר, כאשר יש חשיבות לסדר של המספרים המשתתפים בפעולה, מתבטא גם בשמותיהם: **מחוסר** הוא המספר **ממנו** מחסירים, **מחסר** הוא מספר **אותו** מחסירים (התוצאה – הפרש); **מחולק** הוא המספר **אותו** מחלקים, **מחלק** הוא המספר **בו** מחלקים (התוצאה – מנה, או מנה ושארית, אם מדובר בחילוק שלם עם שארית).

חוק הקיבוץ

החוק השני מתייחס לאפשרות לבצע מספר פעולות חשבון בזו אחר זו מבלי הצורך לרשום תוצאות ביניים, כמו בדוגמה שבה התחלנו. כאן יש צורך להבדיל בין שני מקרים:

א. כל הפעולות אותן מבצעים בזו אחר זו הן פעולות חיבור או כפל.

ב. הפעולות הן שונות זו מזו.

במקרה שבו מבצעים מספר פעולות חיבור בזו אחר זו, כפי שהופיע בדוגמה 3+5+17+25, ניתן לשנות את סדר ביצוע פעולות החשבון על ידי כך שמחברים, למשל, לא קודם 3+5 אלא קודם 5+17 ואז את התוצאה מחברים עם 3 (ובסוף את התוצאה מחברים עם 25). את שינוי הסדר הזה מביעים באמצעות רישום סוגריים:

$$3+5+17=(3+5)+17=3+(5+17).$$

בדומה לכך,

$$3\times5\times17=(3\times5)\times17=3\times(5\times17).$$

חוק זה נקרא **חוק הקיבוץ** (בלועזית – associative law).

עבור פעולות החיסור והחילוק חוק הקיבוץ למעשה מקנה את המשמעות לפעולה חוזרת. למשל, המשמעות של 10-5-2 היא: $10-5-2=(10-5)-2$. עם זאת, חשוב מאד לשים לב לכך שחוק הקיבוץ בצורה שבה הוא מתקיים עבור חיבור וכפל **אינו** מתקיים עבור חיסור וחילוק. למשל,

$$(10-5)-2 \neq 10-(5-2) \text{, וגם } (10:5):2 \neq 10:(5:2).$$

יהיה קל יותר לזכור זאת וגם להבין זאת, למשל מתוך השיקול הבא:

כאשר מדובר במחסרים (או מחלקים) טבעיים השונים מ-0 או מ-1 (בהתאם לפעולה), פעולת החיסור אמורה להקטין, כלומר, התוצאה אמורה להיות קטנה מהמחוסר, ובדומה, גם פעולת החילוק אמורה להקטין, כלומר, המנה אמורה להיות קטנה מהמחולק. בהתאם למשמעות של פעולת החיסור, ככל שמחסירים פחות, כך נשאר יותר, כלומר, ההפרש צריך לגדול. בסדרת הפעולות $(10-5)-2$ מהמספר 10 מחסירים 5, ולאחר מכן שוב מחסירים 2. במילים אחרות, במקרה הזה מחסירים מהמספר 10 את (2+5). לעומת זאת, בסדרת הפעולות $10-(5-2)$ קודם מקטינים את המחסר: 5-2, כלומר, מהמספר 10 מחסירים כבר לא 5 אלא רק 3. במילים אחרות,

$$(10-5)-2=10-(5+2)=3, \qquad 10-(5-2)=10-5+2=7.$$

באופן דומה,

$$\underbrace{\underbrace{(10:5)}_{2}:2}_{2:2=1}=1;$$

$$\underbrace{10:\underbrace{(5:2)}_{2\frac{1}{2}}}_{10:2\frac{1}{2}=4}=4$$

חשוב לציין שוב ששיקולים אלה אך ורק עוזרים לזכור את הכללים, אך אינם מתקיימים באופן כללי שכן החיסור והחילוק בהחלט לא תמיד מקטינים – לשם כך התייחסנו בדוגמאות למספרים טבעיים השונים מ-0 ו-1!

כאשר רשומות מספר פעולות שונות בזו אחר זו, חוקי קיבוץ אינם חלים בדרך כלל, אלא סדר הפעולות נקבע כך: מבצעים קודם את פעולות הכפל והחילוק ולאחר מכן - את פעולות החיבור והחיסור, כאשר את פעולות הכפל והחילוק מחליפים בתוצאות שלהן.

השימוש בסוגריים

על מנת לשנות את סדר ביצוע פעולות החשבון כך שהוא לא יתבצע לפי סדר הרישום, משתמשים, כפי שעשינו כבר קודם, ב**סוגריים**. סוגריים הם סימן מתמטי מוסכם הקובע את סדר פעולות החשבון לפי הכללים הבאים:

- אם בסדרת הפעולות אין סוגריים, מבצעים כאמור קודם את פעולות הכפל והחילוק ולאחר מכן - את פעולות החיבור והחיסור.
- אם בסדרת הפעולות יש סוגריים, הפעולות שבסוגריים מתבצעות לפני פעולות שמחוץ לסוגריים, כאשר כל הפעולות שבסוגריים מחליפים בתוצאות שלהן.
- אם יש סוגריים בתוך סוגריים, מבצעים קודם את הפעולות בסוגריים הפנימיים יותר.
- לא מקובל לרשום סוגריים אם הם אינם משנים את סדר הפעולות, למשל, אין צורך בסוגריים ברישום הבא: $(3+5)=8$, או $(3+5\times10)$, או $3+(5\times10)$, להבדיל מ- $(3+5)\times10$.

אל חלק מהכללים האחרים של עבודה עם סוגריים כבר התייחסנו בחוקי החילוף והקיבוץ, ואל חלקם נתייחס בהמשך.

1. נשים לב שבדוגמה הראשונה שינויי הסדר שביצענו היו תוצאה של שימוש חוזר בשני החוקים - חילוף וקיבוץ:

$$((3+5)+17)+25=((\underbrace{5+3}_{\text{חוק חילוף}})+17)+25=\underbrace{((5+(3+17)}_{\text{חוק קיבוץ}}+25=$$

$$\underbrace{((3+17)+5)}_{\text{חוק חילוף}}+25=\underbrace{(3+17)+(5+25)}_{\text{חוק קיבוץ}}$$

חוק הפילוג

חוקי החילוף והקיבוץ התייחסו לפעולות מאותו סוג: לפעולות החיבור או לפעולות הכפל. כאשר **בפעולות הכפל או החילוק אחד הגורמים או המחולק** הוא עצמו תוצאה של פעולת חיבור או חיסור, מדברים על **חוקי פילוג**, והנה מצבים האפשריים של חוק פילוג עם דוגמאות:

$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$ - פילוג בין חיבור לכפל; למשל, $(9+7)\times 2 = 9\times 2 + 7\times 2$

$(a-b)\times c = a\times c - b\times c$ - פילוג בין חיסור לכפל; למשל, $(9-7)\times 2 = 9\times 2 - 7\times 2$

$(a+b):c = a:c + b:c$ - פילוג בין חיבור לחילוק; למשל, $(16+12):4 = 16:4+12:4$

$(a-b):c = a:c - b:c$ - פילוג בין חיסור לחילוק; למשל, $(16-12):4 = 16:4-12:4$

את חוקי הפילוג אפשר לפרש בכמה דרכים.

א. כך למשל, אם מתייחסים לסכום $a\times c + b\times c$, אפשר לזהות בו פעולת חיבור שבה שני המחוברים הן מכפלות שבכל אחת מהן יש אותו גורם c. אומרים במקרה כזה שיש לשני המחוברים **גורם משותף**. משמעות חוק הפילוג במקרה זה, כאשר מחליפים את $a\times c + b\times c$ ב- $(a+b)\times c$ הוא **הוצאת גורם משותף אל מחוץ לסוגריים:**

$$(a+b)\times c \xleftarrow{\quad} a\times c + b\times c \text{ .}$$

ב. את אותו החוק אפשר לראות גם בכיוון הפוך: אם את הפעולות הרשומות באמצעות הסוגריים $(a+b)\times c$ רוצים לרשום ללא סוגריים, משמעות חוק הפילוג במקרה זה היא **פתיחת סוגריים**, כלומר, מעבר לביטוי שקול הרשום ללא שימוש בסוגרים:

$$(a+b)\times c \xrightarrow{\quad} a\times c + b\times c$$

פירוש דומה אפשר לתת לחוק הפילוג בין כפל לחיסור ואפילו בין חיבור או חיסור לחילוק, אם נזכור שחילוק במספר כלשהו הוא כפל במספר ההופכי לו. אם כן, גם במקרה זה אפשר לדבר על הוצאת גורם משותף, למשל:

$$15:5-10:5 = 15\times\frac{1}{5} - 10\times\frac{1}{5} = (15-10)\times\frac{1}{5} = (15-10):5$$

חשוב: חוק הפילוג **איננו מתקיים אם המחלק** הוא סכום או הפרש של מספרים אחרים,

למשל: $15:(5\pm 2)\neq 15:5\pm 15:2$.

כדי לא להתבלבל בסדר ביצוע פעולות כאשר מדובר בסדרת פעולות כפל וחילוק, כדאי לזכור שכל פעולת חילוק אפשר לרשום בצורת כפל במספר ההופכי למחלק. זה נוח משום שאפשר לאחר מכן להשתמש בחוקי חילוף וקיבוץ עבור כפל, למשל:

$$12:5:4:3=12\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=12\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=12:4:3:5=\frac{1}{5}$$

עם זאת, חשוב ביותר לזכור ש**הופעת סוגריים משנה את התוצאה**, למשל:

$$12:(5:4):3=12\times\frac{1}{5:4}\times\frac{1}{3}=12\times\frac{1}{1\frac{1}{4}}\times\frac{1}{3}=12\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1\frac{1}{4}}=4:1\frac{1}{4}=\frac{16}{5}.$$

כללי חשבון וביצוע חישובים

שימוש מושכל ונבון בחוקי החשבון יכול להקל באופן משמעותי על החישובים.

לדוגמה נתבונן בחישוב הבא:

$$375:8-303:8$$

אפשר לבצע לפי הסדר הרשום ולקבל:

$$375:8-303:8=46\frac{7}{8}-37\frac{7}{8}=9,$$

אבל אפשר גם להשתמש בחוק הפילוג ולבצע את החישובים ללא צורך בשברים:

$$375:8-303:8=(375-303):8=72:8=9.$$

עוד דוגמה:

$$1\frac{19}{50}\times 36\frac{2}{3}+1\frac{19}{50}\times 51\frac{1}{3}+1\frac{19}{50}\times 12=1\frac{19}{50}\times(36\frac{2}{3}+51\frac{1}{3}+12)=1\frac{19}{50}\times 100=1.38\times 100=138$$

סביר להניח שדרך זו תיראה נוחה יותר מאשר החישוב לפי סדר רישום הפעולות.

דוגמה נוספת:

$$15\frac{2}{17}\times\frac{1}{6}+461\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}-15\frac{2}{17}\times\frac{1}{2}+461\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}-461\frac{5}{9}\times1\frac{1}{8}+15\frac{2}{17}\times\frac{1}{3}=$$
$$(15\frac{2}{17}\times\frac{1}{6}-15\frac{2}{17}\times\frac{1}{2}+15\frac{2}{17}\times\frac{1}{3})+(461\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}+461\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}-461\frac{5}{9}\times1\frac{1}{8})=$$
$$15\frac{2}{17}\times\underbrace{(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}_{0}+461\frac{5}{9}\times\underbrace{(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-1\frac{1}{8})}_{0}=0$$

כמובן שדרך זו עדיפה על ביצוע כל החישובי ביניים כמו למשל $15\frac{2}{17}\times\frac{1}{6}=\frac{257}{102}$, חישובים של מכנים משותפים של כל השברים שמתקבלים וכך הלאה – כל זה רק כדי לקבל 0 בסוף, אם, כמובן, לא עשינו טעויות חשבון בדרך!