מערכות מספרים – מספרים רציונליים

ד"ר איליה סיניצקי, המכללה האקדמית לחינוך גורדון חיפה

לעיסוק במספרים רציונליים יש היסטוריה ארוכה. כבר האדם הקדמון השתמש בחלקים של שלם בחישוביו הפשוטים; במצרים העתיקה השתמשו בשברים מסוימים לתיאור מצבים ולחישובים; ביוון העתיקה ובהודו העתיקה השימוש במספרים רציונליים הפך שיטתי, לרבות למידה תאורטית של שברים - וראייתם כאובייקטים מתמטיים במסגרת לימוד תורת המספרים. בספרו של אוקלידס, **יסודות**, המונח 'מספר רציונלי' מופיע בהקשר של חיפוש מידה המשותפת לשני קטעים.

מקור המילה 'רציונלי' הוא במילה הלועזית ratio, כלומר יחס. המונח 'מספר רציונלי' נועד להבחין בין מספרים המתקבלים כיחס בין (או כמנה של) שני מספרים שלמים לבין מספרים שאי-אפשר להציגם בדרך זו (מספרים אי-רציונליים). ההבנה כי קיימים גם מספרים אי-רציונליים (כמו למשל $\sqrt{2}$, אורך האלכסון בריבוע שאורך צלעו 1) הייתה אחד הגילויים הגדולים של המתמטיקה העתיקה.

תוכן עניינים

הגדרות ומונחים דידקטיים

הגדרה מתמטית של מספר רציונלי

מספר רציונלי אפשר לתאר כתוצאת פעולת החילוק המתקיימת בין שני מספרים שלמים, מחולק ומחלק, כאשר המחלק שונה מ-0. לפיכך קבוצה זו מכילה את כל המספרים השלמים: 1 הוא איבר נייטרלי בכפל, ולכן מספר z הוא גם המנה המתקבלת אם נחלקו ב-1. קבוצת המספרים הרציונליים מכילה גם אובייקטים שאינם מספרים שלמים. כך למשל מנת המספרים 8 ו-3 אינה מספר שלם, ותוצאת חילוקו של המספר 1 בכל מספר טבעי גדול מ-1 אינה מספר שלם.

מספר רציונלי מוגדר כזוג סדור (a,b) של מספרים שלמים a,b. האיבר השני בזוג זה שונה מ-0: $b \neq 0$. נוהגים להציג זוגות אלה בצורה הבאה: $\frac{a}{b}$. לפי דרך ההצגה הזו, הזוגות $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ מבטאים אותו המספר אם ורק אם מתקיים שוויון בין המכפלות של מספרים שלמים $ad = bc$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc \qquad (*)$$

כך למשל את המספר $\frac{3}{17}$ אפשר להציג כ-$\frac{9}{51}$, כי

$$3 \cdot 51 = 3 \cdot (3 \cdot 17) = (3 \cdot 3) \cdot 17 = 9 \cdot 17$$

קבוצה של מספרים רציונליים מסומנת בדרך כלל באות הלועזית Q. המקור לכך הוא המילה הגרמנית Quotient שפירושה יחס. כל מספר שלם אפשר להציג כמנת חילוקו במספר שלם 1, ולפיכך קבוצת המספרים השלמים היא קבוצה חלקית של קבוצת המספרים הרציונליים.

מונחים דידקטיים לתיאור שברים פשוטים

בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי משתמשים בכמה מונחים דידקטיים: שבר פשוט, שבר קטן מ-1, מספר מעורב, מספר עשרוני וכן הלאה. נוסף על היותו מנה של שני מספרים שלמים, למספר רציונלי יש משמעויות רבות אחרות – חלק מהשלם, חלק מהכמות וכן הלאה. תלמידים 'פוגשים' לראשונה במספר רציונלי בחלוקה של יחידה שלמה לחלקים. חלק מהשלם מכונה 'שבר', ומונח זה מחליף בבית הספר את המונח 'מספר רציונלי'. קיימת קִרבה בין המונחים הללו, אך הם אינם שקולים. בבית הספר היסודי עוסקים במספרים רציונליים לא שליליים (כלומר מספרים חיוביים לרבות 0). כמו כן לא דנים בו במנות של שני מספרים שלמים שליליים, אף שמנתם היא מספר רציונלי חיובי: $2 = \frac{-8}{-4}$ או $\frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}$.

בבית הספר היסודי המספרים הרציונליים אשר נלמדים הם מנות של שני מספרים – המחולק הוא מספר שלם לא שלילי, ואילו המחלק הוא מספר טבעי. אלה **שברים פשוטים**: המחולק הוא **מונה** של השבר, ואילו המחלק הוא **מכנה** של השבר. קו שבר ביניהם מסמל את פעולת החילוק.

קבוצת השברים הפשוטים מתפצלת לשתי קבוצות זרות לפי גודלם של המספרים:

- **מספרים קטנים מ-1** – בשברים אלה המונה קטן מהמכנה (כדאי להזכיר כי שניהם לא יכולים להיות שליליים, ועל המכנה להיות שונה מ-0). בקבוצה זו מקובל להבחין היסטורית ודידקטית ב**שברי יחידה**, כלומר בשברים בעלי מונה השווה ל-1 ומכנה הגדול מ-1. שברי יחידה הם מספרים הופכיים למספרים טבעיים: מכפלת שבר יחידה במכנה של שבר זה שווה ל-1.
- **מספרים שאינם קטנים מ-1** – בכל השברים בקבוצה זו המונה גדול מהמכנה או שווה לו. בתוך כל שבר שאינו קטן מ-1 קיים תמיד חלק שלם. אם אחרי הוצאת חלק שלם משבר כזה נשאר בדיוק 0, מספר זה הוא **[מספר שלם טבעי]**. כך למשל השבר הפשוט $\frac{8}{4}$ הוא מספר טבעי (2), וגם השבר הפשוט $\frac{10002}{3}$ הוא מספר טבעי (כיוון שהמונה שלו הוא כפולה של המכנה 3).

אם המונה גדול מהמכנה, והחילוק במכנה מותיר שארית, אזי לאחר הוצאת החלק השלם נותר עדיין חלק שקטן מ-1. מספר כזה מכונה **מספר מעורב**: זהו סכום של מספר טבעי ושל שבר הקטן מ-1. כך למשל בחילוק 9 ב-4 מתקבלות המנה 2 והשארית 1, והשבר $\frac{9}{4}$ הוא סכום של המספר הטבעי 2 ושל השבר $\frac{1}{4}$ ($\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$). במספר מעורב לא מקובל להציג את סימן החיבור, ולכן רושמים אותו באופן הבא: $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ או $\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$. עם זאת, לא מקובל לרשום שבר מעורב באופן הבא: $\frac{20}{3}=5\frac{5}{3}$ (החלק ה'שברי' במספר מעורב קטן תמיד ממספר שלם).

עבור כל מספר טבעי אפשר לרשום הרבה שברים שמספר זה יהיה המכנה שלהם. ולהפך: כל שבר אפשר לבטא באמצעות מגוון ייצוגים אשר נבדלים במכניהם. כך למשל צוין לעיל כי $\frac{9}{51}=\frac{3}{17}$ בשל כלל היסוד (*) של שוויון בין מספרים רציונליים. לפי אותו הכלל, מתקיים גם $\frac{11}{22}=\frac{5}{10}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

שברים עשרוניים

מבין שלל הייצוגים של מספרים רציונליים מבחינים בשברים שמכניהם הם 10 או חזקות של 10: 100, 1000, 10,000 וכן הלאה. שברים כאלה מכונים **שברים עשרוניים**. כך למשל השברים $\frac{3}{10},\frac{21}{10},\frac{15}{100}$ הם שברים עשרוניים. בהצגתם של שברים עשרוניים אין צורך לכתוב את המכנה, והדרך המקובלת היא הרחבת המבנה העשורי של המספרים הטבעיים לתחום המספרים הרציונליים. ההפרדה בין החלק השלם של מספר זה לבין חלק הקטן משלם היא באמצעות נקודה עשרונית: הספרה הראשונה מימין לנקודה העשרונית מייצגת את מספר העשיריות השלמות בשבר עשרוני, הספרה השנייה מייצגת את מספר המאיות השלמות וכן הלאה:

$0.5 = \frac{5}{10}$, $0.13 = \frac{13}{100}$, $0.07 = \frac{7}{100}$ (הספרה 0 שמימין לנקודה העשרונית מייצגת את מספר העשיריות), $1.3 = 1\frac{3}{10}$. בשל דרך הכתיבה הזאת שברים עשרוניים מכונים גם **מספרים עשרוניים**. מספרים עשרוניים יש לקרוא לפי משמעותם ולפי ערכם: 0.1 הוא 'עשירית' (ולא 'אפס נקודה אחת'), כפי ש-10 אינו 'אחת אפס' אלא 'עשר'. בדומה לכך 0.04 הוא 'ארבע מאיות' (ולא 'אפס נקודה אפס ארבע'), ו-0.35 הוא 35 מאיות (או 'שלוש עשיריות ועוד חמש מאיות', וזאת בהתאם לייצוגו כסכום: 0.35=0.3+0.05).

ייצוגים שונים של מספרים רציונליים

כל מספר רציונלי אפשר להציג בדרכים רבות. כפי שהראינו לעיל, כל שני שברים המקיימים את כלל (*) שווים זה לזה. עם זאת, חלק מהשברים הפשוטים אפשר להציג כמספרים עשרוניים.

בשל ההקבלה בין ביצוע פעולות חשבון במספרים עשרוניים לבין ביצוע פעולות אלו במספרים טבעיים, לעתים ההמרה משבר פשוט לשבר עשרוני מקֵלה על העיסוק במספרים רציונליים.

המרת שבר פשוט לשבר עשרוני

א. שברים פשוטים אשר המכנה שלהם הוא 10 או חזקה של 10 הם כבר שברים עשרוניים, ומעבר לדרך הכתיבה המקובלת של מספר עשרוני הוא בגדר שכתוב של שבר זה.

ב. לעתים אפשר להמיר שברים פשוטים בעלי מכנה ש**אינו** 10 או חזקה שלו לשברים בעלי מכנה שהוא 10 או חזקה שלו, וזאת באמצעות הכפלתם של המונה והמכנה במספר טבעי זהה ('הרחבה') או חילוקם במספר טבעי זהה ('צמצום'): $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{3}{4}$, $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{8}{20}$.

מאחר שמחלקיו הראשוניים של המספר 10 הם 2 ו-5 בלבד, גם בפירוק לגורמים ראשוניים של כל אחת מהחזקות של 10 מופיעים רק המספרים 2 ו-5 (במעלות שוות): $10 = 2 \times 5, 10^2 = 2^2 \times 5^2, 10^3 = 2^3 \times 5^3, \dots, 10^n = 2^n \times 5^n$. לפיכך שבר פשוט אפשר להמיר לשבר עשרוני, אם ורק אם בפירוק מכנה של השבר המצומצם לגורמים ראשוניים לא מופיעים מספרים השונים מ-2 ו-5.

ב'הרחבת' שבר כזה בגורם המתאים מתקבל שבר עשרוני:

$0.075 = \frac{75}{1000} = \frac{75}{(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)} = \frac{3\times5\times5}{2\times2\times2\times5\times5\times5} = \frac{3}{2\times2\times2\times5} = \frac{3}{40} = \frac{9}{120}$ (גורם ההרחבה מסומן באדום).

יש לציין כי את מספר הספרות אחרי הנקודה העשרונית (לאחר המרת השבר) אפשר לדעת כבר לאחר פירוק המכנה של השבר המצומצם לגורמים ראשוניים.

ג. שברים פשוטים אחרים אי-אפשר להמיר למספר עשרוני הכולל מספר ספרות סופי אחרי הנקודה העשרונית. כך למשל המכנה של השבר $\frac{1}{6}$ מכיל את הגורם הראשוני 3, ושום 'הרחבה' של שבר זה בגורם טבעי כלשהו אינה יכולה 'להביא' את המכנה לחזקה כלשהי של 10.

עבור כל שבר מסוג זה אפשר לקבל קירובים עשרוניים באמצעות 'חילוק ארוך'. כך למשל השבר $\frac{3}{7}$ הוא בעצם שביעית מ-30 עשיריות, ובחילוק של 30 עשיריות ל-7 מתקבלות מנה בת ארבע (4) עשיריות ושארית בת שתי (2) עשיריות. אחרי המרת שתי העשיריות ל-20 מאיות מחלקים גם אותן ב-7 וכן הלאה – בדיוק כפי שעושים ב'חילוק ארוך' של מספרים טבעיים. תהליך זה אינו יכול להסתיים, כיוון שבמקרה כזה תתקבל הצגה עשרונית סופית של שבר זה. הדבר בלתי-אפשרי.

יכולות להתקבל רק 6 שאריות שונות מ-0 בחילוק ב-7, ואחרי שישה שלבים לכל היותר יתקבל שוב אותו המחולק. מתקבל אפוא **שבר עשרוני אינסופי מחזורי**. בדוגמה שלעיל מתקבלת שוב ושוב קבוצה בת 6 ספרות: $\frac{3}{7} = 0.428571428571\ ...$. קבוצת הספרות החוזרת על עצמה מכוּנה **מחזור השבר העשרוני**. נהוג לסמן אותה באחד משני אופנים: $\frac{3}{7} = 0.(428571)$ או $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$. בדומה לכך $\frac{5}{11} = 0.(45)$ או $\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$. אם מחזור השבר מכיל רק ספרה אחת, משתמשים בדרך סימון נוספת – נקודה מעל לספרה החוזרת: $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$, $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$ (מחזור השבר לא חייב להתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית). מספר הספרות במחזור השבר (**אורך המחזור**) אינו קטן תמיד באחד מהמכנה *b* של השבר, אך הוא תמיד מחלק של המספר (*b-1*).

לפי סעיפים ב' ו-ג', אפשר אפוא להציג כל מספר רציונלי כמספר עשרוני הכולל מספר ספרות סופי אחרי הנקודה העשרונית ('מספר עשרוני סופי'), או כמספר עשרוני הכולל קבוצות ספרות שחוזרות על עצמן ממקום מסוים אחרי הנקודה העשרונית ('מספר עשרוני אינסופי מחזורי').

ממספר עשרוני לשבר פשוט

המרת שבר עשרוני סופי לשבר פשוט פירושה 'שכתוב' של השבר הזה ו'צמצומו' במידת הצורך: $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. כאשר מספר רציונלי מוצג כמספר עשרוני אינסופי מחזורי, ערכו כשבר פשוט אינו בולט. המרתו לשבר פשוט מבוססת על הכפלתו בחזקה מתאימה של 10 – ההפרש בין המכפלה לבין המספר הנתון יהיה כבר מספר עשרוני סופי.

א. נדגים את הדברים באמצעות המרה של המספר $a = 0.\overline{54}$:

$a = 0.\overline{54} = 0.545454\ ...$,

נכפול את המספר ב-100 ונקבל: $100a = 54.545454\ ...$.

כעת נחסר את השורה הראשונה מהשנייה ונקבל $99a = 54$ (הספרות הזהות שאחרי הנקודה העשרונית 'מתבטלות'). לפיכך $a = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$.

ב. את המספר $b = 0.\dot{1} = 0.111\ldots$ נמיר לשבר פשוט באמצעות הכפלתו ב-10:

$10b = 1.\dot{1} = 1.111\ldots$. ההפרש שווה ל- $10b - b = 1$, ולכן $b = \frac{1}{9}$.

ג. באופן דומה למדי נמיר את המספר $c = 0.1\dot{6}$:

$10c = 1.\dot{6} = 1.666\ldots$, $100c = 16.\dot{6} = 16.666\ldots$. ההפרש בין שני המספרים האלה הוא:

$$100c - 10c = 16.666\ldots - 1.666\ldots = 15$$

לפיכך נקבל $90c = 15$, ולכן $c = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

ד. נבצע המרה למספר $d = 0.\dot{9} = 0.999\ldots$. לאחר תהליך דומה נקבל $10d = 9.\dot{9} = 9.999\ldots$. ההפרש הוא $10d - d = 9$, ולכן $d = \frac{9}{9} = 1$. במילים אחרות, $0.\dot{9} = 1$. יש לציין כי שוויון זה הוא מדויק **ואינו קירוב** של מספר עשרוני אינסופי – המספר **...0.999 הוא הצגה אחרת של המספר 1**. כנ"ל עבור כל שבר פשוט שהמונה הטבעי שלו שווה למכנה.

שברים משולבים

נוסף על הייצוגים של מספר רציונלי כשבר פשוט או כמספר עשרוני סופי או אינסופי מחזורי, קיימת דרך הצגה נוספת. דומה כי מקורותיה של דרך ייצוג זו הם במצרים העתיקה, שם היה נהוג להציג שברים באמצעות שברי יחידה. **שבר משולב** הוא ביטוי המתקבל באמצעות תהליך חוזר של הצגת מספר כסכומם של החלק השלם שלו ושל מספר הופכי למספר אחר. גם המספר האחר הוא סכום של חלק שלם שלו ושל מספר הופכי למספר אחר, וכן הלאה.

כך למשל המספר $2\frac{2}{5}$ מכיל חלק שלם (2) וחלק $\left(\frac{2}{5}\right)$ הקטן משלם. מספר הופכי לחלק זה $\left(\frac{5}{2}\right)$ גדול משלם, ואפשר להציג אותו כסכום של חלק שלם (2) ושל שבר $\left(\frac{1}{2}\right)$. לפיכך נקבל:

$$2\frac{2}{5} = 2 + \frac{1}{5/2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}.$$

המספר $2\frac{2}{5}$ מוצג אפוא כסכומם של מספר שלם ושל שבר אשר המונה שלו שווה ל-1, והמכנה שלו הוא סכום מ'אותו הסוג' של המספר הנתון – שלם ועוד שבר שמנתו שווה ל-1.

עבור מספר רציונלי אחר 'אורך ההצגה' יכול להיות שונה. כך למשל המספר $2\frac{1}{4}$ מבוטא כשבר משולב כבר אחרי הוצאת החלק השלם: $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$. לעומת זאת יש מספרים רציונליים אשר הצגתם כשבר משולב ארוכה יותר:

$$\frac{43}{17}=2+\frac{9}{17}=2+\frac{1}{17/9}=2+\frac{1}{1+\frac{8}{9}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{9/8}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{8}}}$$

בסוף התהליך המספר הרציונלי מוצג אפוא באמצעות הביטוי הבא:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

מקובל לכתוב מספר זה כך: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. בהתאם לסימון זה נקבל את דרכי הרישום הבאות: $\frac{43}{17}=[2;1,1,8],\ 2\frac{1}{4}=[2;4],\ 2\frac{2}{5}=[2;2,2]$.

שברים משולבים מספקים הצגה אחידה של כל המספרים הרציונליים. לייצוג של מספרים רציונליים כשברים משולבים יש חשיבות רבה:

- סדרת המספרים השלמים $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, כאשר a_0 לא שלילי וכל היתר הם מספרים טבעיים, מגדירה חד-משמעית כל מספר רציונלי. כל מספר רציונלי אפשר להציג כשבר משולב סופי (תהליך ההמרה מסתיים אחרי מספר סופי של צעדים);
- כל שבר משולב $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$ 'קצר יותר' $(i < n)$ המתקבל בתהליך המרה הוא קירוב של המספר הרציונלי המוצג;
- הרחבת המושג 'שבר משולב' למקרה שיש אינסוף מחוברים מביאה לשברים משולבים אינסופיים אשר מציגים מספרים אחרים, לא רציונליים. גם עבור מספרים אלה כל שבר משולב סופי המתקבל בתהליך ההמרה הוא קירוב רציונלי שלהם.

השוואה בין מספרים רציונליים

בשל ריבוי דרכי הייצוג של מספרים רציונליים, ההשוואה ביניהם מורכבת יותר מאשר השוואה בין מספרים טבעיים. במהלך ההשוואה לעתים יש צורך לעבור מייצוג אחד לייצוג אחר של המספר. לפיכך נושא ההשוואה 'צמוד' לסעיף הקודם שעניינו ייצוגים שונים של מספרים רציונליים.

השוואה בין מספרים עשרוניים

כאשר שני מספרים רציונליים מוצגים כמספרים עשרוניים סופיים, דרך השוואתם זהה לדרך ההשוואה בין שני מספרים טבעיים:

- המספר 2.5 גדול מהמספר 2.3, כי 2.5 פירושו 25 עשיריות ו-2.3 פירושו 23 עשיריות. את ההשוואה הזו אפשר לבצע בהדרגה משמאל לימין: בשני המספרים הנתונים יש מספר זהה של יחידות שלמות (שתיים), וההבדל ביניהם הוא במספר העשיריות **הנוספות** – ב-2.5 מספר העשיריות הכולל (25) גדול יותר מאשר ב-2.3 (23).

- המספר 0.52 קטן מהמספר 0.7: 0.7=0.70, ולפיכך יש בו 70 מאיות לעומת 52 מאיות ב-0.52. בדומה להשוואה הקודמת, אפשר להשוות 'לפי עשיריות', 'לפי מאיות' וכן הלאה. קריאה נכונה של מספרים עשרוניים עוזרת להשוות ביניהם.
- באופן דומה אפשר להשוות בין שני מספרים רציונליים אשר ייצוגו העשרוני של אחד מהם, או של שניהם, הוא מספר עשרוני אינסופי מחזורי. כך למשל המספר $0.\overline{43}$ גדול מהמספר 0.434 (למרות 'המראה החיצוני'!) – אחרי הצגתו כסכום אינסופי לפי המבנה העשרוני, נקבל:

$$0.\overline{43} = 0.4343 \ldots = 0.4 + 0.03 + 0.004 + 0.0003 + \cdots$$

לעומת זאת המספר השני שווה בדיוק לסכום של שלושת המחוברים הראשונים בייצוג שלעיל:

$$0.434 = 0.4 + 0.03 + 0.004.$$

בדומה לכך המספר $0.\overline{54}$ קטן מהמספר $0.\dot{5}$. כיוון שאותן הספרות מופיעות בשני המספרים במקומות של השלמים והעשיריות, הספרות במָקום המוקצה למאיות קובעות את תוצאות ההשוואה:

$$0.\overline{54} = 0.5454 \ldots = 0.5 + 0.04 + 0.005 + \cdots$$

$$0.\dot{5} = 0.5555 \ldots = 0.5 + 0.05 + 0.005 + \cdots$$

שתי הערות בהקשר זה:

א. אם אחד המספרים הרציונליים שיש להשוות ביניהם או שניהם מוצגים כשברים פשוטים, אפשר להשוות ביניהם באמצעות המרת שבר פשוט לשבר עשרוני. כך למשל המספר $\frac{21}{5}$ קטן מהמספר 4.21, כי $\frac{21}{5} = 4.2$. לפעמים אין צורך להמיר 'עד הסוף'. כך למשל בהמרת המספר $\frac{22}{7}$ למספר עשרוני בדרך של 'חילוק ארוך', מתקבלות הספרות הראשונות הבאות: $\frac{22}{7} = 3.142 \ldots$. ברור אפוא כי מספר זה גדול מהמספר 3.14.

ב. יש לזכור כי מספר רציונלי המוצג כמספר אינסופי מחזורי הוא סכום של איברי סדרה הנדסית. כך למשל סכום המאיות, האלפיות וכן הלאה עשוי להסתכם לכדי עשירית שלמה: $0.3\dot{9} = 0.3 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots = 0.3 + 0.1$. לפיכך במקרים כאלה יש להימנע מקביעת אי-שוויון 'לפי הספרה האחרונה' – המספר 0.4 שווה בדיוק למספר $0.3\dot{9}$ (ולא גדול ממנו).

השוואה בין שברים פשוטים

היחס 'גדול מ' מוגדר בקבוצת השברים לפי אי-שוויון בין מכפלות של מספרים שלמים $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow ad > bc$ עבור a, c לא שליליים ועבור b, d חיוביים. את ההשוואה בין שני שברים פשוטים אפשר לבצע תמיד 'לפי ההגדרה' באמצעות המרת שניהם לשברים בעלי מכנה זהה ('המכנה המשותף'). כמו במערכת המספרים הטבעיים יחס זה מקיים את 'כלל המעבר' (טרנזיטיביות): $x > y, y > z \Rightarrow x > z$. כלל זה מאפשר השוואת מספרים 'בשרשרת'. עם זאת, השוואת שברים

לפי הגדרה אינה פשוטה. כך למשל קשה להשוות בין המכפלות המתקבלות מהשוואה בין השברים $\frac{31}{51}$ ו-$\frac{53}{73}$.

קיימות דרכים נוספות להשוואה בין שברים פשוטים אשר מאפשרות להימנע מחיפוש אחַר מכנה משותף ומ'התעסקות' במספרים טבעיים גדולים. דרכים אלו מבוססות על חיפוש **הרכיב הקבוע** בשני השברים שרוצים להשוות ביניהם:

- **השוואה בין מספרים מעורבים** – כאשר אחד השברים או שניהם אינם קטנים מ-1, אפשר להפריד את החלק השלם מהשבר. אם חלקים אלה אינם שווים בשני השברים הנתונים, די בהשוואה ביניהם לצורך מציאת פתרון. כך למשל המספר $\frac{21}{13}$ מכיל שלם אחד ($\frac{21}{13} = 1\frac{8}{13}$), והוא קטן מהמספר $\frac{13}{5}$ אשר גדול מ-2. ההשוואה היא תמיד בין שברים פשוטים הקטנים מ-1.
- **השוואה בין שברים שמכניהם שווים** – מהגדרת היחס 'גדול' נובע כי בין שני שברים בעלי מכנה זהה גדול יותר השבר שהמונה שלו גדול יותר: $\frac{5}{13} > \frac{7}{13}$.
- **השוואה בין שברים בעלי מונים שווים** – בין שני שברים בעלי מונה זהה גדול יותר השבר שהמכנה שלו קטן יותר: $\frac{7}{15} > \frac{7}{13}$.
- לצורך יישום השיטות הקודמות ממירים את אחד השברים הנתונים, או את שניהם, לייצוגים אחרים שלהם **באמצעות הרחבה וצמצום**. כך למשל $\frac{2}{9} > \frac{1}{3}$, כי $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $\frac{6}{9} < \frac{8}{15}$, כי $\frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.
- לעתים ההחלטה איזה מהשברים גדול יותר מתקבלת מ**שיקולי אומדן**. כך למשל השבר $\frac{9}{23}$ קטן יותר מהשבר $\frac{10}{21}$ – גם ללא חישוב ברור כי המכפלה 10×23 גדולה יותר מהמכפלה

  9×21. במילים אחרות צירוף של 9 חלקים 'קטנים' (כל אחד מהם הוא $1/23$ מהשלם) קטן יותר מצירוף של 10 חלקים 'גדולים' (כל אחד מהם הוא $1/21$ מהשלם).
- **השוואה באמצעות מתווך** – בדומה לשיטה שהוצגה בסעיף הקודם, לצורך השוואה בין שני שברים כדאי למצוא שבר נוסף אשר נמצא ביניהם (גדול מהאחד וקטן מהאחר). יש לבחור ב'מתווך' אשר ההשוואה לו תהיה פשוטה יחסית. לצורך ההשוואות הנוספות הנדרשות (לאחר בחירת ה'מתווך') אפשר להשתמש באחת השיטות שהוזכרו לעיל. כך למשל $\frac{7}{13} < \frac{8}{17}$, כי השבר הימני גדול מחצי ($\frac{7}{13} < \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$) והשבר השמאלי קטן מחצי ($\frac{8}{17} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$). לצורך ההשוואה בין השברים $\frac{2}{7}$ ו- $\frac{3}{8}$ אפשר להיעזר בשבר שליש אשר נמצא ביניהם: $\frac{3}{8} < \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} < \frac{2}{7}$.
- **השוואה באמצעות השלמה** – לצורך השוואה בין שני שברים הקטנים מ-1 כדאי לעתים להשוות בין השברים המשלימים את כל אחד מהשברים הנתונים ל-1 (או לכל מספר

אחר). כך למשל לשבר $\frac{8}{9}$ יש להוסיף $\frac{1}{9}$ כדי להשלימו ל-1, ולעומת זאת לשבר $\frac{11}{12}$ יש להוסיף מספר קטן יותר $(\frac{1}{12})$ כדי להשלימו ל-1. לפיכך בהשוואה בין השברים $\frac{8}{9}$ ו- $\frac{11}{12}$ השבר הראשון הוא קטן יותר.

המבנה של מערכת המספרים הרציונליים

למבנה של מספרים רציונליים יש תכונות מיוחדות:

- **צפיפות** – בין כל זוג של מספרים רציונליים שונים $\frac{c}{d}$ ו- $\frac{a}{b}$ קיימים מספרים רציונליים נוספים (אחד המספרים האלה הוא $(\frac{a+c}{b+d}$). לתהליך של מציאת מספר בין שני מספרים רציונליים אפשר לחזור שוב ושוב. לפעמים אומרים כי בין זוג של מספרים רציונליים יש עוד אינסוף מספרים רציונליים. לפיכך אין מספר שהוא 'הקרוב ביותר' למספר רציונלי מסוים. כך למשל בין כל שבר הקטן מ-1 לבין המספר 1 יש תמיד מספרים רציונליים נוספים; אין מספר רציונלי שהוא 'הכי קרוב' ל-0. המונחים 'מספר עוקב' ו'מספר קודם' אינם רלוונטיים לקבוצת המספרים הרציונליים.
- **סגירות לפעולות חשבון** – לזוג המספרים הרציונליים $\frac{c}{d}$ ו- $\frac{a}{b}$ מוגדרות פעולות חיבור וכפל כדלקמן: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. קל לראות כי סכום ומכפלה של שני מספרים רציונליים שייכים לקבוצה זו: אלה מנות של מספרים שלמים, כי גם המונה וגם המכנה של כל אחת מהמנות האלו מתקבלים באמצעות חיבור וכפל של מספרים שלמים. פעולות חיבור וכפל מוגדרות בקבוצת המספרים הרציונליים באופן המחייב קיום של חוקי פעולות החשבון גם בקבוצה הזאת (חוק החילוף בחיבור ובכפל, חוק הקיבוץ בחיבור ובכפל, חוק הפילוג של כפל על פני חיבור). פעולות חיסור וחילוק מוגדרות (כמו תמיד) כחיפוש אחַר מחובר או גורם לא ידוע.
התוצאות של כל אחת מארבע פעולות החשבון האלו שייכות לקבוצת המספרים הרציונליים (פרט לחילוק ב-0). לפיכך אומרים שקבוצת המספרים הרציונליים סגורה עבור כל פעולות החשבון (פרט לחילוק ב-0).
- **מספר הופכי** – בניגוד לקבוצות המספרים הטבעיים והשלמים, בקבוצת המספרים הרציונליים **לכל** מספר פרט ל-0 קיים מספר אשר המכפלה שלו ושל מספר הנתון שווה ל-1. כך למשל המספר ההופכי ל-2 הוא $\frac{1}{2}$, המספר ההופכי ל-(1-) הוא המספר עצמו (1-), והמספר ההופכי ל- $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ הוא $\frac{2}{5}$.

מבנה שהוא בעל תכונות כאלה מכונה 'שדה', ולכן המספרים הרציונליים הם שדה של מספרים.

- **תוצאות של פעולות חשבון במספרים הרציונליים** – עקב קושי מסוים בביצוע פעולות חשבון במספרים הרציונליים, חשוב לאמוד את התוצאות בהתבסס על תכונות כלליות של פעולות החשבון. חלק מהתכונות של סכום, מכפלה, הפרש ומנה של מספרים רציונליים מקבילות לתכונות של תוצאות פעולות החשבון במספרים הטבעיים. כך למשל סכום של שני מספרים

רציונליים חיוביים יהיה תמיד חיובי וגדול מכל אחד מהמחוברים, מנה של שני מספרים כאלה שווה ל-1 אם ורק אם הם שווים זה לזה וכן הלאה.

עם זאת, חלק מהתכונות אינן דומות לתכונות של אותן הפעולות בקבוצת המספרים הטבעיים. נציין להלן כמה מהן:

- מכפלה של שני מספרים רציונליים יכולה להיות קטנה מאחד הגורמים ואף משניהם. יתרה מזאת, מכפלה של שברים חיובים קטנים מ-1 קטנה תמיד מ-1 וקטנה גם מכל אחד מהגורמים.
- בקבוצת המספרים הרציונליים קיימים זוגות רבים של מספרים אשר קיים שוויון בין סכומם לבין מכפלתם. כך למשל $1\frac{1}{2}\times 3 = 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}+3$, $1\frac{1}{9}\times 10 = 11\frac{1}{9} = 1\frac{1}{9}+10$.
- בקבוצת המספרים הרציונליים קיימים זוגות רבים של מספרים אשר קיים שוויון בין הפרשם לבין מכפלתם. כך למשל $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $1\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$, $5\times\frac{5}{6}=5\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=5-\frac{5}{6}$.

עקב מורכבות תכונותיהן של פעולות החשבון, חיפוש אחרי הפעולה אשר מספקת את התוצאה הגדולה ביותר (או הקטנה ביותר) לשני המספרים הנתונים יכול להוות בעיית חקר לתלמידים.

בהמשך לימודיהם התלמידים מכירים מספרים נוספים. את המספרים האלה אי-אפשר לרשום כמנה של שני מספרים שלמים, וייצוגם כמספר עשרוני הוא אינסופי ולא מחזורי. מספרים אלה מכונים 'מספרים אי-רציונליים'. יחד עם קבוצת המספרים הרציונליים הם מרכיבים את קבוצת המספרים הממשיים אשר 'ממלאים' את ציר המספרים.

עריכה לשונית: שמוליק אבידר