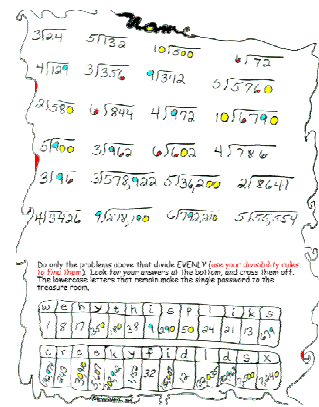


# סימני התחלקות

חזק א'

ד"ר מריטה ברבש,

המכללה האקדמית לחינוך אחוה



על מנת להבין על מה מבוססים סימני התחלקות, נזכיר בקצרה את חוק הפילוג של החילוק מעל החיבור:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

נניח שלושת המספרים  $a, b, c$  בשוויון זה הם מספרים טבעיים, וגם  $a$  מתחלק ב- $c$  ללא שארית; אז הסכום  $a+b$  כולו יתחלק ב- $c$  אם גם  $b$  יתחלק ב- $c$  ללא שארית. אם, לעומת זאת,  $b$  משאיר שארית בחילוק ב- $c$ , זו תהיה גם השארית של הסכום כולו.

דוגמה:

$$157 : 7 = (140 + 17) : 7$$

המספר 140 מתחלק ב-7 ללא שארית, אבל 17 משאיר שארית (השווה ל-3) בחילוק ב-7, ולכן גם המספר כולו 157 אינו מתחלק ב-7 ללא שארית, והשארית מחילוק של 157 ב-7 היא גם השארית של חילוק 17 ב-7, והיא שווה ל-3.

בנוסף לכך, נזכיר את משמעות החילוק ללא שארית:

מספר טבעי  $a$  מתחלק ללא שארית במספר טבעי  $b$ , אם  $b$  הוא אחד המחלקים (הגורמים) של  $a$ , כלומר, אפשר לפרק את  $a$  למכפלה של שני גורמים טבעיים כך ש- $b$  הוא אחד הגורמים (הגורם השני הוא למעשה המנה מחילוק של  $a$  ב- $b$ ).

דוגמה:

24 מתחלק ללא שארית ב-8, מכיוון שניתן לרשום את 24 כמכפלה של שני גורמים שאחד מהם הוא  $8 : 24 = 8 \times 3$ .

כאשר אומרים מספר כלשהו מתחלק במספר אחר ללא שארית, אפשר לומר גם שהשארית בחילוק זה היא 0.

תפקידם של סימני התחלקות הוא לעזור לגלות האם מספר כלשהו מתחלק במספר אחר מבלי לבצע את פעולת החילוק הלכה למעשה אלא על ידי ביצוע פעולות חשבון פשוטות יותר.

חשוב להדגיש שסימני ההתחלקות אינם מחליפים את הצורך בידע בסיסי של לוח הכפל בגבולות של 100, כפי שנראה בהמשך. שימושים נוספים חשובים של סימני התחלקות נראה בהמשך.

## סימני התחלקות ישירים וסימני התחלקות נגזרים

כדאי להבחין בין שני סוגים של סימני התחלקות: סימני התחלקות ישירים וסימני התחלקות נגזרים. סימני התחלקות ישירים מבוססים ישירות על תכונות המחלק. כך למשל, קיימים סימני התחלקות ישירים ב-2,3,4,5 ועוד (נוסיף ונפרט בהמשך), וניסוחם מתבסס על תכונות של מספרים אלה.

לעומת זאת, סימן ההתחלקות ב-6 איננו ישיר אלא מתבסס על התחלקות ב-2 וב-3: על מנת לבדוק האם מספר כלשהו מתחלק ב-6, בודקים בנפרד האם הוא מתחלק ב-2 והאם הוא מתחלק ב-3. אם הוא מתחלק בשני המספרים האלה, אז הוא מתחלק גם ב-6.

למרבה הפלא, קל יותר לבסס ולהסביר את סימני ההתחלקות הנגזרים. סימני ההתחלקות הנגזרים מבוססים על הצגתו של חילוק ללא שארית שהוזכרה בסעיף 1. כך למשל, אם מספר טבעי כלשהו  $a$  מתחלק ב-2, אז ניתן להציגו בצורה

$$a = 2 \times b$$

כאשר  $b$  גם הוא מספר טבעי. אם  $a = 2 \times b$  מתחלק גם ב-3, זה אומר ש- $b$  מתחלק ב-3, כלומר,  $b = 3 \times c$ , ופה  $c$  מספר טבעי. לסיכום נקבל ש-

$$a = 2 \times b = 2 \times 3 \times c = 6 \times c$$

כלומר,  $a$  מתחלק ב-6 ללא שארית.

את הדוגמאות לשימוש בסימני התחלקות נגזרים נראה בהמשך, וגם ננתח שגיאות נפוצות הקשורות בשימוש בהם.

## ניסוח סימני התחלקות

מקובל לנסח סימני התחלקות בנוסח הבא: **אם תנאי להתחלקות אז המספר מתחלק ב-...** (כאשר אומרים "מתחלק ב-" מתכוונים לחילוק ללא שארית).

**דוגמה:**

אם סכום הספרות של מספר מתחלק ב-9, אז המספר עצמו מתחלק ב-9.

אנחנו נראה בהסתמך על סעיף 1, שאפשר (וגם כדאי) לנסח את סימני ההתחלקות בצורה המכילה מידע רב יותר. כך למשל, סימן ההתחלקות ב-9 מנוסח למעשה כך: המספר מתחלק ב-9, אם סכום הספרות שלו מתחלק ב-9. אם סכום הספרות משאיר שארית בחילוק ב-9, זו תהיה גם השארית בחילוק ב-9 של המספר כולו.

אפשר לנסח זאת בקצרה גם כך:  $f$  מספר ולסכום הספרות של  $f$  אותה שארית בחילוק  $f-9$  (כאשר המקרה של חילוק  $f$  שארית מתאימה שארית השווה  $f-0$ ).

**דוגמה:**

סכום ספרות המספר 1489502 הוא

$$1 + 4 + 8 + 9 + 5 + 0 + 2 = 29$$

29 מתחלק ב-9 עם שארית 2, וזו גם שארית של המספר 1489502 בחילוק ב-9. אפשר לבדוק זאת:

$$1489502 = 16550 \times 9 + 2$$

בהמשך ננסח את סימני ההתחלקות בצורה זו, וגם נראה שנוסח זה נובע מחוק הפילוג ומהמבנה העשורי של מספרים.

### סימני התחלקות המבוססים על סיומת

חלק מסימני ההתחלקות המוכרים (הנלמדים בבית הספר היסודי) מבוססים על בדיקת סיומת מספר. כך למשל, על מנת לבדוק האם מספר כלשהו מתחלק ב-2, מספיק לבדוק את ספרת היחידות שלו (או את הסיומת החד-ספרתית שלו): אם ספרת היחידות היא 0, 2, 4, 6 או 8 – המספר מתחלק ב-2, ואם  $f$  – הוא שארית 1 בחילוק ב-2.<sup>1</sup>

הערה: כידוע, מספרים המתחלקים ב-2 נקראים מספרים זוגיים. את המספרים הזוגיים עד 10 חייבים לזכור, משום שבעזרתם אפשר לגלות עבור מספרים גדולים יותר האם הם זוגיים או לא. במילים אחרות, סימן ההתחלקות ב-2 אומר שהמספר זוגי אם ספרת היחידות שלו זוגית, ואי זוגי, אם ספרת היחידות שלו אי זוגית.

באופן דומה, סימן ההתחלקות ב-5 מתבסס גם הוא על הסיומת החד-ספרתית של המספר, ואפשר לנסח אותו כך: המספר מתחלק ב-5 אם ורק אם ספרת היחידות שלו מתחלקת ב-5 (כלומר, היא שווה 5 או 0).

סיומת דו-ספרתית היא המספר הדו-ספרתי המורכב מספרות העשרות והיחידות של המספר. כך, הסיומת הדו-ספרתית של 2253 היא 53.

סימני התחלקות המבוססים על הסיומת הדו-ספרתית הם סימני התחלקות ב-4, 20, 25:

המספר מתחלק ב-4 (או ב-20, או ב-25) אם ורק אם הסיומת הדו-ספרתית שלו מתחלקת ב-4 (או ב-20, או ב-25). אם המספר איננו מתחלק ב-4 (או ב-20, או ב-25), אז השארית שלו בחילוק זה שווה לשארית הסיומת הדו-ספרתית.

בנוסח קצר יותר:

למספר ולסיומת הדו-ספרתית שלו אותה שארית בחילוק ב-4 (או ב-20, או ב-25).

<sup>1</sup> נזכיר ש-0 מתחלק בכל מספר ללא שארית (פרט ל-0 עצמו).

## דוגמה:

המספר 1176 אינו מתחלק ב-25 וגם לא ב-20, משום ש-76 לא מתחלק לא ב-25 ולא ב-20. לעומת זאת, 76 מתחלק ב-4, ולכן 1176 מתחלק ב-4. שארית החילוק של 1176 ב-25 היא 1, שהיא שארית החילוק של 76 ב-25. שארית החילוק של 1176 ב-20 היא 16 ( $76=20 \times 3 + 16$ ).

**הערה:** כפי שאמרנו מקודם, השימוש בסימני ההתחלקות אינו פוטר מהצורך בידע בסיסי בעובדות הכפל, כמו, למשל, לוח הכפל בגבולות של 100 וחוק הפילוג. כך, על מנת לגלות את שארית החילוק של 76 ב-20, יש צורך להציג את 76 כ- $16+60$ .

אמנם סימני התחלקות ב-20, 25, ומספרים נוספים אליהם נתייחס כאן, אינם מופיעים בתכנית הלימודים, אבל אנו נראה שנגיע אליהם "כתוצר לוואי", כאשר נסביר מדוע מתקיימים סימני התחלקות ב-4 וב-5. באופן דומה אפשר להגיע לסימן ההתחלקות ב-50.

## מדוע נכונים סימני ההתחלקות המבוססים על סיומת של מספר

נסביר מדוע נכונים סימני ההתחלקות המבוססים על סיומת של מספר, וגם נראה אילו סימנים נוספים המתבססים על סיומת ניתן לגלות "בדרך". לשם כך נתבסס על הייצוג העשרוני של מספרים.

על מנת לגלות האם מספר כלשהו (הגדול מ-10) מתחלק ב-2 או ב-5, נציג אותו כסכום של מספר שלם של עשרות ושל מספר המבוטא על ידי ספרת היחידות שלו.

$$137 = 130 + 7 \quad \text{דוגמה:}$$

זאת משום ש-2 ו-5 הם (ורק הם, פרט ל-10 עצמו) המחלקים (הגורמים) של 10: מספר שלם של עשרות מתחלק תמיד ב-2 (וגם ב-5, וגם ב-10), ולכן מה שיקבע האם המספר כולו יתחלק ב-2 (או ב-5, או ב-10) הוא המחובר השני – 7. לפי מה שלמדנו בסעיף 1, שארית החילוק של 7 ב-2 היא גם שארית החילוק ב-2 של המספר 137 (והיא שווה ל-1), וכך גם לגבי 5 (השארית היא 2), וכך גם לגבי 10 (השארית היא 7).

באופן דומה, על מנת לגלות האם מספר כלשהו מתחלק ב-4, נצטרך להציג אותו כסכום של שני מספרים שאחד מהם תמיד מתחלק ב-4, והצגה כזאת נקבל על ידי הפרדה של מספר מאות שלמות מהמספר המקורי.

$$1500 + 28 = 1528 \quad \text{דוגמה:}$$

1500 הוא מספר של מאות ( $1500=15 \times 100$ ), ולכן מתחלק ב-4 ללא שארית. מה שיקבע האם למספר כולו (1528 בדוגמה שלנו) תהיה שארית בחילוק ב-4, מספיק להסתכל רק על המספר 28 שהוא הסיומת הדו-ספרתית שלו. היות ש-28 מתחלק ב-4, גם המספר כולו 1528 מתחלק ב-4.

אם ניזכר כי  $25 \times 4 = 100$ , נבין מדוע קיבלנו "בדרך" גם את סימן ההתחלקות ב-25, וגם הוא מבוסס על הסיימת הדו-ספרתית. בדוגמה שלנו, השארית של חילוק של 1528 ב-28 היא גם השארית של חילוק 28 ב-25, והיא שווה 3.

## צבור איילו מספרים קיימים סימני התחלקות

### המבוססים על סיומת המספר?

על מנת לענות לשאלה זו, נתבונן שוב במבנה עשרוני שבו אנחנו משתמשים כאשר "מפרידים" מהמספר את הסיימת שלו: כאשר הפרדנו את הסיימת החד-ספרתית, קיבלנו אחד המחוברים שהוא מספר שלם של עשרות, ולכן תמיד בטוח מתחלק ב-2, 5 ו-10, על כן המחובר השני (שספרת היחידות, או הסיימת החד ספרתית) היא זו הקובעת האם יש למספר שארית בחילוק ב-2 (או ב-5, או ב-10), ואם יש – מה היא.

באופן דומה, כאשר הפרדנו מהמספר את הסיימת הדו-ספרתית שלו, קיבלנו סכום של שני מחוברים שאחד מהם הוא מספר שלם של מאות, והשני – מספר דו-ספרתי הנוצר על ידי עשרות ויחידות של המספר. מספר שלם של מאות מתחלק תמיד ב-100, ב-50, ב-20, ב-25, ב-4 (הוא כמובן מתחלק גם ב-2, 5, 10), אבל לשם גילוי התחלקות במספרים אלה אין צורך בשתי ספרות, כפי שכבר ראינו. על כן, מה שיקבע האם המספר כולו יתחלק ב-100, ב-20, ב-25, ב-4, מספיק להסתכל רק על הסיימת הדו-ספרתית שלו, והיא זו שתקבע האם תהיה שארית בחילוק באחד המספרים האלה, ואם תהיה – מה היא.

## איילו סימני התחלקות נוכח לילדות בהתבסס

### על בסיס הסיימת התלת ספרתית?

הפרדה של סיימות תלת ספרתית מהמספר משאירה אותנו עם מחובר אחד שהוא מספר שלם של אלפים. למשל,

$$33 \times 1000 + 866 = 33000 + 866 = 33866$$

1000 מתחלק בכל הגורמים של 100 ושל 10, אבל אלה לא מוסיפים לנו מידע חדש וגם לא מחייבים הסתכלות על שלוש ספרות. אבל 1000 מתחלק גם ב-8 וב-125, ב-250 וב-500, על כן אפשר, אם רוצים, לנסח סימני התחלקות במספרים אלה, למשל, שארית המספר בחילוק ב-8 שווה לשארית של חילוק ב-8 של הסיימת התלת-הספרתית של המספר. לגבי סימן התחלקות זה חשוב להעיר שתי הערות:

**הערה 1:** זהו סימן ההתחלקות היחיד ב-8! בהמשך נתייחס לשגיאות נפוצות מאד הקשורות בכך.

**הערה 2:** על מנת להשתמש בסימן התחלקות זה ב-8 (סימני התחלקות ב-125, ב-250 וב-500 פחות נפוצים ופחות נוחים), יש צורך בבדיקת החילוק ב-8 של מספר תלת ספרתי, ולשם כך יש להשתמש בחוק הפילוג.

כך, למספר 33866 מהדוגמה לעיל, ול-866 אותה שארית בחילוק ב-8, וכדי לגלות אותה אפשר להציג את 866 בצורה

$$866 = 800 + 66$$

ומכאן ששארית מחילוק המספר 866 (וגם של 33866, וגם של 3333338888866) בחילוק ב-8 היא 2 – שארית החילוק ב-8 של 66.

## פסיכומ.

סימני ההתחלקות המבוססים על סיומת מתייחסים אך ורק למחלקים של חזקה מתאימה של 10 :

- סיומת חד-ספרתית מובילה לסימני התחלקות במספרים 2,5,10 - המחלקים של  $10^1$  ;
- סיומת דו ספרתית – במחלקים של  $10^2=100$ , שהם 4, 25,50, 100 (שוב נעיר, שלמרות שגם 2,5,10 הם מחלקים של 100, עבורם אין צורך בסיומת דו ספרתית);
- סיומת תלת ספרתית מובילה לסימני התחלקות במספרים שהם המחלקים של  $10^3=1000$ , והם 8,125,250,500,1000.

אפשר כמובן להמשיך גם לחזקות גבוהות יותר של 10 וכך לקבל סימני התחלקות למשל ב-16, אבל נזכיר: סימני התחלקות נועדו לפשט את הבדיקה, בעוד שימוש בסימני התחלקות המבוססים על בדיקת התחלקות של מספר בן 4 ספרות מחייב חישובים שמשותווים לחילוק המקורי שצריך לבצע, על כן לפחות ברמה של בית ספר יסודי הם לא שימושיים.

מקור התמונה :

<http://www.themathlab.com/natural/division/divisibilityrules.htm>