האפס כספרה

מאת: מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך, אחוה

יש להבחין, בראש ובראשונה, בין שתי משמעויות בסיסיות של 0: כמספר וכספרה[1]. בכך 0 כביכול אינו שונה מכל ספרה אחרת. אבל ל-0 כספרה במערכת פוזיציונית שני תפקידים מיוחדים שאין לאף סמל אחר מבין אלה המסמנים ספרות:

- תפקיד של שומר מקום.
- תפקיד של ספרה שבעזרתה אפשר ליצור רישום **נוח ואחיד** למספרים גדולים יותר מ-9 (כאשר מדובר במערכת העשרונית), ואף למספרים קטנים מ-1 - למעשה, לכל מספר ממשי.

על מנת להבין את שני התפקידים של הספרה 0, נסקור את עקרונות המבנה של מערכת פוזיציונית. ביסוד המבנה של שיטת ההצגה של מספרים במערכת פוזיציונית - בחירה של מספר מסוים כבסיס, והצגה של כל מספר אחר כסכום החזקות העוקבות של הבסיס; בסכום זה כופלים כל חזקה במספר המראה כמה פעמים היא מופיעה בסכום. החזקות הראשונות של 10 הן $10=10^1$, $100=10^2$, $1000=10^3$, וכך הלאה. נשים לב שמעריך של חזקת הבסיס מצביע גם על מספר ה**אפסים** אחרי 1 המופיע ברישומה[2] וגם על המיקום של הספרה המתאימה ברישום המספר:

- המיקום של הספרה הכופלת את $10^2 =100$ הוא שני מקומות ימינה מספרת היחידות.
- המיקום של ספרה הכופלת את $10^6= 1\ 000\ 000$ הוא שישה מקומות ימינה מספרת היחידות.

את החזקות של הבסיס רושמים כך שהמקום של החזקה הגבוהה ביותר הוא השמאלי ביותר ברישום המספר:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
1	9	3	8	1

הסכום המתקבל מכך הוא:

$$10^4\cdot1+10^3\cdot9+10^2\cdot3+10^1\cdot8+10^0\cdot1 = 10\ 000\cdot1+ 1\ 000\cdot9+100\cdot3+10\cdot8+1\cdot1 = 19381$$

ברישום של מספר כמו, למשל, 19381, משמעות הספרה 1 תלויה במיקומה (בלועזית: **פוזיציה**, ומכאן שם השיטה) של ספרה זו במספר.

[1] כל ספרה היא סמל, סימן גרפי, שמסמן בין היתר גם מספר חד ספרתי במערכת עשרונית (ובכל מערכת פוזיציונית אחרת). הסמלים המקובלים במערכת העשרונית, בנוסף ל-0, הם 1,2,3,4,5,6,7,8,9. כל אחד מהסמלים האלה גם מסמן מספר.

[2] זו אולי הדרך הפשוטה ביותר לראות מדוע $10^0=1$ - אחרי 1 במקרה הזה אין אפסים בכלל, אם כי זה לא הסבר מלא לתכונה זו של 0 כ**מספר**.

הספרה השמאלית ביותר מצביעה על כך שהחזקה $10^4 = 10\ 000$ נכנסת במספר 19381 פעם אחת בלבד. במילים אחרות, אם נחלק את 19381 ב- 10^4, נקבל מנה השווה ל- 1. השארית היא 9381, היא קטנה יותר (כמובן) מהחזקה שבה חילקנו. על מנת לדעת כמה פעמים נכנסת בה החזקה הבאה - 10^3=1 000, נחלק את השארית הזאת ב-1000 - נקבל מנה 9 ושארית 381. המנה היא הספרה השנייה משמאל ברישום המספר, והיא מציינת כמה פעמים 10^3 נכנסת ב**תוך השארית הקודמת** שהתקבלה מחילוק ב-10^4. את השארית החדשה 381 נחלק בחזקה הבאה של 10, וכך הלאה, עד שנגיע לספרת היחידות.

בתהליך זה מתעוררות שאלות הקשורות ב-0:

- מדוע $10^0=1$?
- כיצד נוצר מצב שאחת הספרות היא 0?
- מדוע 0 לא מופיע כספרה השמאלית ביותר של המספר ויכול להופיע כספרה הימנית ביותר?

השאלה הראשונה מתייחסת ל-0 כ**מספר**. ההיגיון שעומד מאחורי העובדה ש**לכל מספר a השונה** מ-0 מתאים $a^0=1$ הוא בהסתכלות על הסדרה של חזקות (שלמות) יורדות של המספר a בהתאם לחוקי החזקות:

$$a^3 = a^4 : a$$
$$a^2 = a^3 : a$$
$$a^1 = a^2 : a$$

מה נרשום אם כן, כאן:

$$a^0 = ?$$

לפי אותה החוקיות נקבל

$$a^0 = a^1 : a = a : a = 1 .$$

כאמור, כל זה נכון אך ורק אם a - בסיס החזקה, שונה מ-0.

על מנת לענות **לשאלה השנייה והשלישית**, נדגים את קבלת המבנה עשרוני של המספר 2031. המספר 2031 קטן יותר מ-$10^4 = 10\ 000$. אם נחלק אותו ב-10^4- נקבל מנה 0 ושארית - 2031. הוא גם קטן מ-10^5 וגם אם נחלק בחזקה זו ובכל חזקה גדולה יותר של 10, נקבל מנה 0. פירוש הדבר ***שאפשר לרשום מצידו השמאלי של המספר מספר ספרות 0 כרצוננו, אבל הן לא מוסיפות מידע על המספר עצמו - הן בסך הכל יציינו שהוא קטן מהחזקות המתאימות של 10 - מידע מיותר לחלוטין.***

במתמטיקה אומרים שאלה ספרות **לא משמעותיות:** 2031 = 002031= 00002031 , הוספת האפסים משמאל למספר לא מוסיפה מידע. עם זאת, במקרים מסוימים משתמשים בצורת כתיבה זו לצרכים ספציפיים.

אם נחלק את 2031 ב $1\ 000 = 10^3$ שהיא החזקה הגבוהה ביותר של 10 ש**לא עולה על המספר עצמו**, נקבל מנה 2 ושארית 31:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
0 (לא כותבים)	2			

החזקה הבאה של 10 היא $10^2 = 100$. נחלק את השארית 31 ב-100 ונקבל מנה 0 אותה נרשום במקום המתאים לחזקה שבה חילקנו. 31 שוב יהיה לשארית, אותה נחלק עתה ב-10, נקבל מנה 3 - ספרת עשרות, ו-1 - ספרת היחידות:

$10^4 = 10\ 000$	$10^3 = 1\ 000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
0 (לא כותבים)	2	0	3	1

פירוש התוצאה שקיבלנו הוא שהמספר המבוקש שווה ל- $2\cdot\underline{1\ 000}+0\cdot\underline{100}+3\cdot\underline{10}+1\cdot\underline{1}$ - זהו הייצוג של המספר כסכום שבו המחוברים הם החזקות העוקבות של 10, כל אחת כפולה במספר הכתוב בספרה המתאימה לה בייצוג העשרוני.

מה יקרה אם "נשכח" לרשום את 0 במקום המתאים, המציין שחילקנו ב-100 וקיבלנו 0?
נכון ש- $100 = 10^2$ לא מופיע בסכום המייצג את המספר לפי החזקות של 10, והמחובר המתאים הוא $0\cdot100=0$, אבל אל נשכח שבשיטת הפוזיציה לכל ספרה משמעות כפולה: היא גם מראה כמה פעמים מופיעה חזקה מסוימת של 10 בסכום המייצג את המספר, וגם מציינת על ידי מיקומה במספר, **על איזו חזקה מדובר**. אם "נשכח" לרשום את 0 במקום ספרת המאות, ייראה רישום המספר כך: 231 , כלומר, כתוצאה מהשמטת ספרת המאות את מקומה תפשה ספרת האלפים (או אולי ספרת העשרות?), והמספר כולו שינה לגמרי את ערכו. על מנת למנוע מצב כזה אומרים ש-0 **שומר על מקומה** של החזקה המתאימה למיקומו במספר - מכאן כינוי תפקידו זה כ**שומר מקום.**

את הצורך במילוי המקום ה"ריק", אשר נוצר במקרים כאלה, הבינו כבר מתמטיקאים של עמים קדומים, כמו אשורים, בבלים, אִינְקָה ואחרים. אי לכך, ל**ספרה** 0 פרה-היסטוריה מאד עתיקה, למרות שהיא לא מופיעה אצל עמים קרובים יותר אלינו בזמן: יוונים, רומאים ואחרים, וזאת משום שהם לא השתמשו במערכות ספירה פוזיציוניות. הראשונים שהשתמשו בשיטת ייצוג מספרים הדומה מאד לשיטה המודרנית היו ההודים שמהם למדו אותה סוחרים ערביים במהלך מסעות המסחר שלהם והביאו אותה לאירופה. הספרות המודרניות נקראות ספרות ערביות בזכות הסוחרים הללו, למרות שזכות היוצרים מגיעה להודים. הספרה 0 לא נראתה אז כפי שהיא נראית היום בכל כתבי היד, ותפקידה היה רק למלא את המקום הריק. לפעמים כתבו אותה כנקודה או כעיגול קטן. בכתבי אבן עזרא (המאה ה-11 או ה- 12 לספירה) ספרה זו נקראת "גלגל", בהתאם לצורתה.

לבסוף, אמרנו בתחילת הפרק ששיטת הפוזיציה (ו-0 בראשה!) מאפשר לרשום לא רק מספרים הגדולים מהבסיס אלא גם מספרים הקטנים מ-1. לשם כך ניעזר בחוקי החזקות: $10^{-1}=0.1$,
$10^{-2} = 0.01$, וכך הלאה. בעזרת החזקות השליליות של 10 אפשר להרחיב את המבנה העשרוני

גם למספרים הקטנים מ-1. נשים לב שברישום העשרוני של כל מספר בין 0 ל-1, לפני הנקודה העשרונית יהיה 0 ! למשל,

$0.30492 = 3\cdot10^{-1}+0\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-3}+9\cdot10^{-4}+2\cdot10^{-5}=3\cdot0.1+0\cdot0.01+4\cdot0.001+9\cdot0.0001+2\cdot0.00001$.

הסתכלות נוספת מצביעה על הנוחות שבנוכחות של 0 בייצוג פוזיציוני. אם נחבר את כל המחוברים בסכומים המייצגים את המספרים במאונך, החיבור יהיה מאד נוח:

	1	0	0	0	0
		9	0	0	0
			3	0	0
+				**8**	0
					1
	1	**9**	**3**	**8**	**1**

	0.	0	0	0	0	**2**
	0.	0	0	0	**9**	
	0.	0	0	**4**		
+	0.	0	**0**			
	0.	**3**				
	0.	**3**	**0**	**4**	**9**	**2**

מקור התמונה, הנלווית לכותרת:

http://thumb18.shutterstock.com.edgesuite.net/display_pic_with_logo/308335/308335,1231465359,10/stock-vector-number-zero-of-a-colorful-numeral-series-composed-by-butterflies-and-lady-bugs-full-editable-22984534.jpg