

זוויות

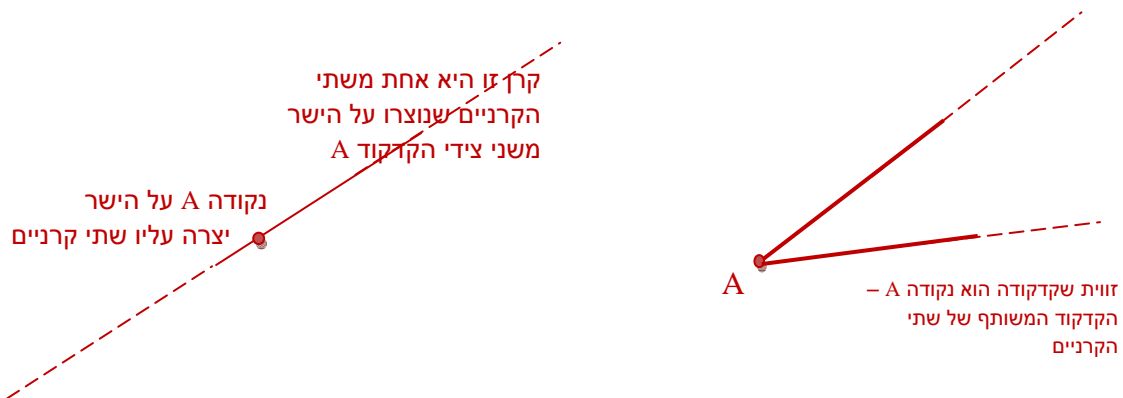
מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחוה

אחד הקשיים הגדולים בהוראת מושג הזווית לאורך שנות הלימוד בבית הספר טמון בכך שתלמידים בשלבי הלימוד השונים פוגשים ב"התגלמויות" שונות של זווית ובעקבות כך – במשמעויות שונות של מדידתה. העיקריות שביניהן הן:

- זווית כצורה גיאומטרית עצמאית. מדידת זווית במקרה זה היא מדידת התחום הפנימי שלה.
- זווית כסיבוב. מדידת זווית במקרה זה היא מידת הסיבוב.
- זווית בין קטעים; זווית במצולע. מדידת זוויות במצולעים. מדידת הזווית במקרה זה חייבת לכלול את ההתייחסות לתחום הפנימי או לתחום החיצוני שלה בהתאם לצורת המצולע.

1. זווית כצורה גיאומטרית

זווית היא צורה גיאומטרית הנוצרת על ידי שתי קרניים בעלות קדקוד משותף. לעיתים אומרים שהקרניים יוצאות מאותו קדקוד.



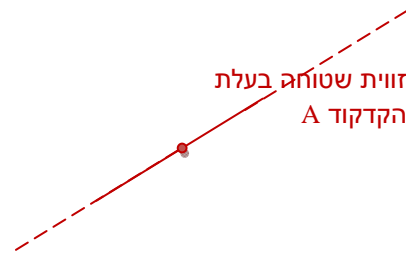
על מנת להבין הגדרה זו ולהשתמש בה בצורה נכונה, יש לזכור כי **קרן** היא חלק אינסופי של קו ישר הנמצא מצד אחד של נקודה על הקו הישר. נקודה זו היא **קדקוד הקרן**, והקדקוד המשותף של שתי קרניים היוצרות את הזווית הוא גם קדקוד הזווית:

שימו לב:

א. שתי קרני הזווית הן **קווים אינסופיים**, וכמובן לא ניתן לשרטט אותם על הדף. יש תמיד לזכור זאת, בין היתר כדי לא לקשר בין **גודל הזווית** (אותו נלמד למצוא מאוחר יותר) לבין **אורכי הקרניים שלה כפי שהן מופיעות על השרטוט**.

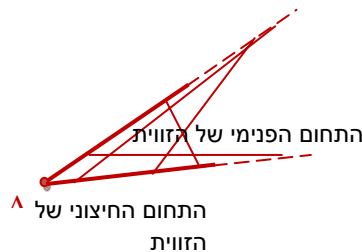
ב. **זווית היא קו**. על מנת להמשיך בהיכרות אתה נצטרך ללמוד את התחומים השונים שנוצרים במישור כאשר משרטטים בו זווית, אך לא נבלבל בין הזווית עצמה שהיא, כאמור, קו, לבין תחומים אלה להם חשיבות משל עצמם.

זווית נקראת שטוחה אם שתי קרניה נמצאות על ישר אחד. למעשה, שתי קרני הזווית השטוחה הם שני חלקים של אותו ישר הנוצרים כאשר בוחרים על הישר נקודה המשמשת **קדקוד הזווית השטוחה**.



חשוב לא לבלבל בין זווית שטוחה לבין קו ישר – אלה שני אובייקטים גיאומטריים שונים, למרות שהם נראים דומים זה לזה.

כל זווית שאיננה שטוחה מחלקת את המישור שבו היא נמצאת לשני חלקים: **תחום פנימי ותחום חיצוני**.



גם זווית שטוחה מחלקת את המישור לשני חלקים הנמצאים משני צידי הקו הישר אשר מכיל אותה, אך לא ניתן לדבר במקרה הזה על תחום פנימי של הזווית או על תחום חיצוני.

חשוב לדעת מהו התחום הפנימי של הזווית משום שעל מושג זה בנויה **השוואת זוויות המובילה למדידתן**. את התחום הפנימי של זווית שאיננה שטוחה אפשר לתאר כך: נדמיין עכביש שטווה את קוריו כך שנקודות האחיזה הן על קרני הזווית, וכל הקורים הם קטעים ישרים בין נקודות האחיזה. התחום הפנימי של הזווית הוא תחום שבו העכביש יכול לפרוש את רשת הקורים שלו: בשרטוט, הקטעים אשר מחברים נקודות על קרני הזווית מדמים את קורי העכביש, וכולם נמצאים בתחום הפנימי, או בקיצור, בפנים, בתוך הזווית.

כמובן חלק מהקטעים המדמים קורים יכולים להימצא גם על אחת מקרני הזווית, אם שתי נקודות האחיזה נמצאות עליה, אבל ברור גם מהו התחום שבו הם יכולים להימצא, ואיפה הקורים ממש לא יכולים להימצא. התחום שבו נמצאים הקורים הוא **התחום הפנימי של הזווית**, והתחום השני הוא **התחום החיצוני שלה**.

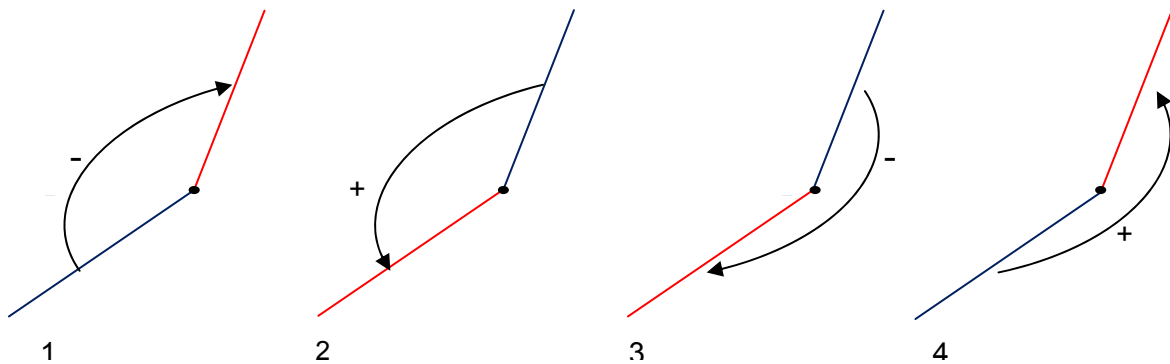
לפעמים מתעוררת השאלה האם הקרניים עצמן שייכות לתחום הפנימי או לתחום החיצוני, אך אין לזה כל חשיבות לשום סוגיה הרלוונטית לבית ספר יסודי, ולכן לא נתייחס אליה כאן.

אחת הנטיות הנפוצות היא לדבר על "מפתח הזווית". מהשרטוט ומהדימוי של זווית הנוצר בעזרת קורי העכביש ברור שלא ניתן לגלות באופן חד משמעי מהו מפתח הזווית, בייחוד כאשר רואים שהקטעים הנמצאים בתחום הפנימי של הזווית יכולים להיות באורכים שונים – עובדה שיכולה רק להקשות על הבנת מושג הזווית. יתרה מזאת, כאשר נרצה לדבר על זוויות כמו, למשל, זווית שטוחה או זווית של סיבוב מלא, מונח זה עוד יותר יקשה על ההבנה. על כן כדאי להימנע מהשימוש במושג של מפתח.

2. זווית כסיבוב

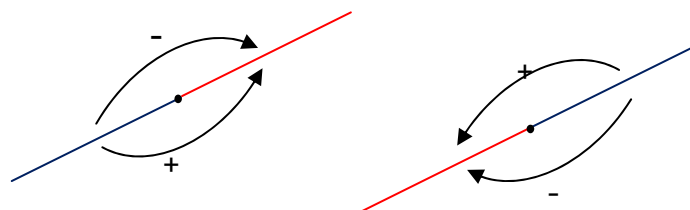
התיאור של זווית כצורה גיאומטרית הוא תיאור סטטי: שתי קרניים המשורטטות במישור. עם זאת, אפשר להפוך תיאור זה לתיאור דינמי, אם נדמיין שאחת הקרניים יכולה להסתובב סביב ציר הנמצא בקדקוד הזווית, בדומה, למשל, למחוגי השעון המסתובבים סביב ציר משותף.

כאשר מדברים על זווית כסיבוב, כלומר, על תיאור דינמי של זווית, מקבעים את אחת הקרניים, כאשר הקרן השנייה יכולה להסתובב עד שהיא מתלכדת אתה. סיבוב זה יכול להתרחש בתחום הפנימי של הזווית ויכול להתרחש גם בתחום החיצוני. כמו כן, הוא יכול להתרחש בכיוון השעון ויכול להתרחש גם נגד כיוון השעון. על מנת להבחין בין שני כיוונים אלה, מקובל לראות בכיוון **נגד כיוון השעון** כיוון סיבוב **חיובי**, ובסיבוב **עם כיוון השעון** – כיוון **שלילי**. ארבע האפשרויות הללו מתוארות בשרטוט, כאשר הקרן הקבועה מסומנת בצבע אדום והקרן המסתובבת – בצבע כחול:



בצורה כזאת אפשר להבדיל בין הסיבובים גם בגודל וגם בסימן, בדומה לכפי שמבדילים בין מספרים, למשל: המספרים (-5) ו-5 הפוכים בסימן אבל שווים בגודל, בעוד ש-5 ו-7 בעלי אותו סימן אבל שונים בגודל. בשרטוט, הסיבובים 1 ו-2 הם שווים גודל אבל הפוכים בסימן, וכך גם הסיבובים 3 ו-4. הסיבובים 1 ו-2 מתרחשים בתחום הפנימי של הזווית, והגודל של כל אחד מהם קטן מגודל של כל אחד מהסיבובים 3, 4 המתרחשים בתחום החיצוני שלה (שימו לב: מדובר כל הזמן באותה זווית, אבל בארבעה סיבובים שונים!).

אם מדובר בקרניים של זווית שטוחה, כל אחת מהזוויות יכולה לבצע סיבוב בכיוון השעון או נגד כיוון השעון, אבל סיבובים אלה יהיו שווים בגודל:



בהמשך, בכיתות גבוהות יותר, התלמידים יכירו גם סיבובים כלליים יותר, למשל, הסיבוב המלא אותו מבצעת קרן עד שהיא שוב מתלכדת עם עצמה, ואף סיבובים גדולים יותר מסיבוב מלא. לכן חשוב שכבר

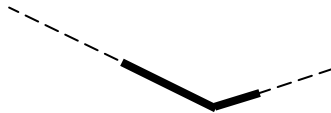
בבית ספר יסודי ייחשפו לסוגים שונים של סיבובים, וכן לזווית סטטית שהיא צורה גיאומטרית ולזווית דינמית שהיא תוצאה של סיבוב, גם אם לא נשתמש במושגים "סטטית", "דינמית" וכדומה.

3. זווית בין שני קטעים.

כאשר מתחילים להכיר סוגים שונים של מצולעים, מדברים על **הזוויות של המצולעים**. היות שמצולעים מורכבים מקטעים, יש צורך להבין את המשמעות של זווית בין שני קטעים. אנחנו נתייחס רק לקטעים בעלי קצה משותף, שכן מה שמעניין אותנו הוא זווית בין צלעות של מצולע, שהם שני קטעים בעלי קצה משותף.

זווית בין שני קטעים בעלי קצה משותף היא זווית בין שתי קרניים המכילות אותן שקדקודן – בקצה המשותף.

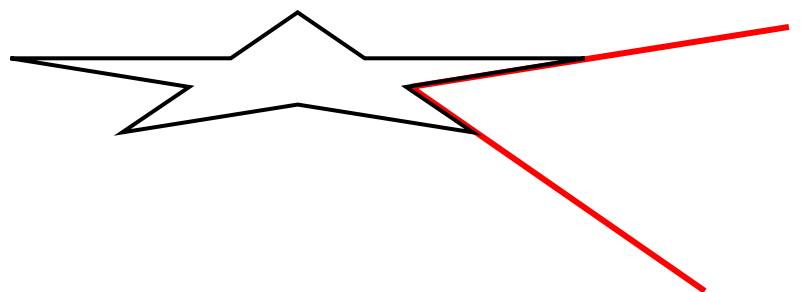
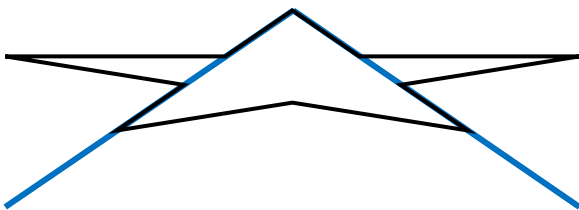
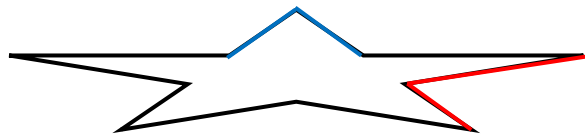
בשרטוט הבא הזווית בין שני הקטעים העבים היא הזווית בין שתי הקרניים המקווקוות:



בצורה כזאת, ניתן לדבר על תחום פנימי ועל תחום חיצוני של זווית בין שני קטעים. באופן כללי, כל מה שנלמד על זוויות בין שתי קרניים יישאר בתוקף גם לזווית בין שני קטעים.

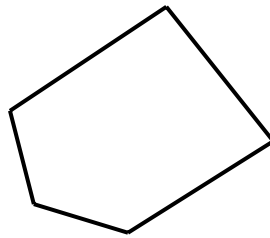
כאשר מדובר על זווית במצולע, חשוב מאד להתייחס לתחומים שהיא יוצרת: פנימי וחיצוני.

אם נסתכל על הכוכב המחומש למטה, נבין את סיבה לכך. במצולע זה נדגיש שתי זוויות בין הצלעות שלו: אחת בצבע אדום ואחת – בצבע כחול.



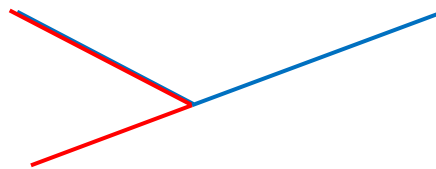
הזווית ה"כחולה" כמו גם הזווית ה"אדומה" הן זוויות בין צלעות המצולע, אך המצולע נמצא בתחום חיצוני של אחת מהן – של הזווית האדומה. מצולע כזה הוא מצולע לא קמור.

לעומת זאת, המצולע הבא הוא מצולעים קמור, מכיוון שהוא לא נמצא בתחום החיצוני של אף אחת מהזוויות שלו. אפשר לבדוק זאת אם מאריכים את הצלעות ומתייחסים לקרניים המכילות אותן, כפי שעשינו עם הכוכב המחומש.



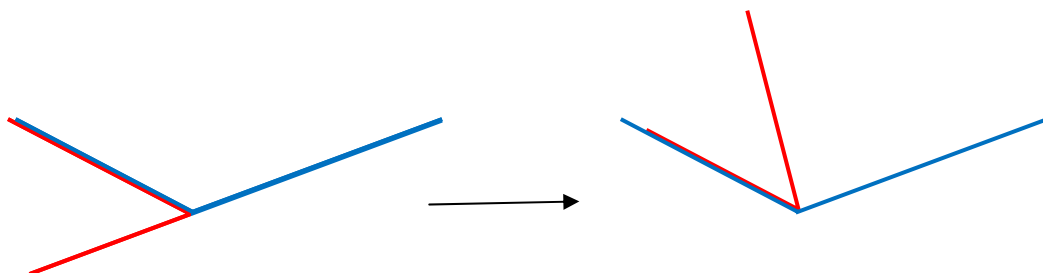
4. השוואת זוויות ומדידתן.

גם כשמדובר בהשוואת זוויות ובמדידתן, נצטרך להתייחס לשלוש ההתגלמויות השונות של מושג הזווית. על מנת להבין מושגים בהשוואת זוויות, נצטרך ללמוד מהן **זוויות צמודות**. אלו הן זוויות שיש להן קדקוד משותף וקרן משותפת, והקרניים האחרות נמצאות על ישר אחד, כמו הזוויות האדומה והכחולה בשרטוט הבא:



על מנת להשוות בין שתי זוויות, אנחנו נעתיק אותן ממקום למקום לפי הצורך, בדרך אותה נתאר כאן. לפעמים נרצה גם לראות האם אפשר להעביר שתי זוויות כך שתיהנה צמודות זו לזו. כמובן לא תמיד אפשרי הדבר.

שתי הזוויות הצמודות שבשרטוט אינן שוות זו לזו. כדי לגלות זאת, ביצענו את **פעולת ההשוואה** ביניהן בדרך הבאה: העברנו אותן כך שיהיה להן קדקוד משותף וקרן משותפת, וכך ששתי הזוויות תהינה מאותו צד של הקרן המשותפת.

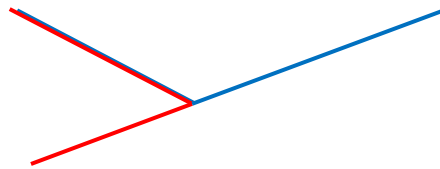


אנחנו רואים שהקרן השנייה של הזווית האדומה נמצאת בתחום הפנימי של הזווית הכחולה, על כן הזוויות אינן שוות ביניהן: הזווית האדומה קטנה יותר מהזווית הכחולה, והזווית הכחולה גדולה יותר **מהזווית האדומה**.

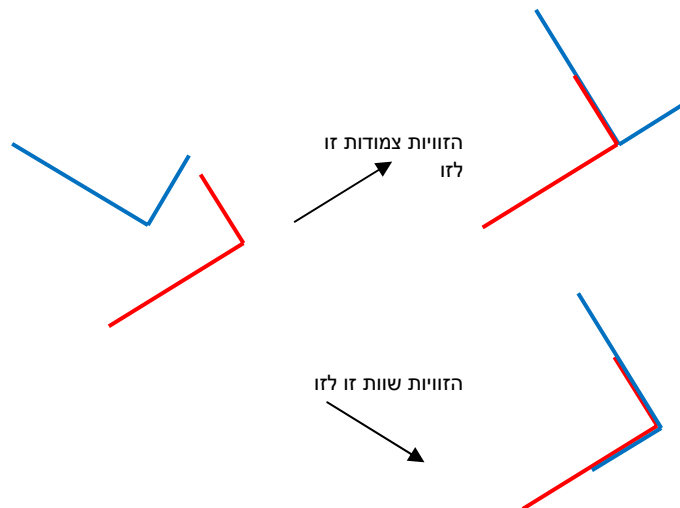
כמובן שכך אפשר להשוות כל שתי זוויות זו עם זו: להעביר אותן כך שיהיה להן קדקוד משותף וקרן משותפת, ושתיהינה מאותו צד של הקרן המשותפת. אם גם הקרניים האחרות מתלכדות זו עם זו – סימן שהזוויות שוות ביניהן, אחרת נוכל תמיד לדעת איזו מהן גדולה מהשנייה. השוואה זו מתייחסת ל**זוויות**

**כצורה גיאומטרית, ומסתמכת על מושג התחום הפנימי. מתהליך זה אפשר גם לדעת מהי זווית ישרה
מהי זווית חדה ומהי זווית קהה:**

אם זווית כלשהי והזווית הצמודה לה שוות זו לזו – כל אחת מהן היא **זווית ישרה**.
אם הזווית קטנה מהזווית הצמודה לה - היא **זווית חדה** (ואז היא גם קטנה מזווית ישרה). הזווית
הצמודה לחדה היא **זווית קהה**. אפשר כמובן גם לומר ש**זווית קהה היא זווית שגדולה מהזווית הצמודה
לה** (היא גם גדולה מזווית ישרה). בשרטוט הבא, הזווית האדומה היא חדה, והזווית הכחולה – קהה:



לעומת זאת, בשרטוט למטה נראה ששתי הזוויות: הכחולה והאדומה שוות זו לזו, ואפשר להעביר אותן
כך שגם תהינה צמודות זו לזו. על כן כל אחת מהן היא **זווית ישרה**:



כאמור, השוואת זוויות בדרך זו מתייחסת אך ורק לתחומים הפנימיים שלהן. אך אם מתייחסים לזווית
דינמית, הסיבוב יכול להתרחש גם בתחום החיצוני. כפי שראינו למשל במקרה של זוויות במצולעים, לא
ניתן להסתפק בתחומים פנימיים בלבד, כלומר, בבדיקה האם הזווית ישרה, חדה או קהה: זה לא מספק
מספיק מידע על תכונות המצולעים וגם על תכונות רבות אחרות במצבים שונים בגיאומטריה. על כן,
כאשר מודדים זוויות, מודדים את **גודל הסיבוב**. כפי שראינו, כל זווית (אם היא איננה זווית שטוחה)
יוצרת שני גדלים של סיבוב, הרי שגודל הסיבוב תלוי האם הסיבוב מתרחש בתום הפנימי של הזווית או
בתחום החיצוני שלה. חשוב לציין שבכל נושא בתכנית לימודים של בית הספר היסודי לא מתייחסים
לסימן של הזווית, כלומר, לכיוון הסיבוב.

אחת היחידות המקובלות ביותר למדידת זוויות היא **מעלה** ($^{\circ}$). מעלה היא זווית סיבוב המהווה חלק $\frac{1}{360}$ של סיבוב מלא. במילים אחרות, אם קרן מבצעת 360 פעמים סיבוב בגודל של מעלה אחת (מסומן

כך: 1°) בכיוון כלשהו, היא חוזרת למצבה ההתחלתי. כך למשל, מחוג הדקות במשך שעה אחת מבצע סיבוב של 360 מעלות (מסומן כך: 360°), ומחוג השעות מבצע סיבוב של 360° במשך 12 שעות. לפיכך, גודל סיבוב המתאים לשעה אחת הוא 30° ($360^{\circ}:12$).

אם נתבונן בשרטוט המסביר את הסיבובים המתאימים לזווית שטוחה, נראה שאחרי שני סיבובים בגודל של זווית שטוחה הקרן חוזרת למצבה ההתחלתי, על כן גודל הסיבוב המתאים לזווית שטוחה הוא 180° .

גודל הסיבוב המתרחש בתחום פנימי של זווית כלשהי קטן מ- 180° , והסיבוב בתחום חיצוני של כל זווית גדול מ- 180° . מד זווית בדרך כלל מודד זוויות בין 0° ל- 180° . אם יש צורך למדוד סיבוב בתחום החיצוני של זווית כך שצפוי לקבל תוצאה הגדולה מ- 180° , מודדים את הסיבוב בתחום הפנימי של אותה זווית ומחסירים אותו מ- 360° . כך למשל, גודל הסיבוב שעושה מחוג השעות במהלך 11 שעות הוא $360^{\circ}-30^{\circ}=330^{\circ}$.

אם ניזכר בהגדרה של זווית ישרה נראה, שאחרי שני סיבובים בזה אחר זה בגודל של זווית ישרה כל אחד, מתקבל סיבוב בגודל של זווית שטוחה, על כן גודל הסיבוב של זווית ישרה הוא 90° . כל זווית חדה קטנה יותר מזווית ישרה ולכן כשנמדוד את הגודל שלה אנחנו צפויים לקבל תוצאה הקטנה מ- 90° , ואם נמדוד זווית קהה – נצפה לקבל תוצאה הגדולה מ- 90° , אבל קטנה מ- 180° .

כאשר אנו מודדים **זוויות של מצולעים**, חשוב מאד להבהיר לפני מדידת הזווית לאיזה סיבוב יש להתייחס: דרך התחום הפנימי או דרך התחום החיצוני שלה, אחרת נקבל תוצאה לא נכונה. כך, אם נחזור לכוכב המחומש שבעמוד הקודם – את הזווית בין שתי הצלעות הכחולות שלו נמדוד לפי התחום הפנימי שלה. במקרה הנתון נצפה לקבל תוצאה הגדולה מ- 90° שכן זוהי זווית קהה, אבל קטנה מ- 180° שכן אנו מודדים את הסיבוב דרך התחום הפנימי. לעומת זאת, את הזווית האדומה נמדוד לפי התחום החיצוני שלה, ונצפה לקבל ערך הגדול מ- 180° ! בפועל, כאשר נשתמש במד זווית, נמצא את גודל הזווית האדומה לפי התחום הפנימי שלה ונחסיר אותו מ- 360° .