הוכחת ההתכנסות של משחק ההפרשים Diff Box
לסדרה בת ארבעה איברים

הגדרות

- **קופסה מגודל N** — סדרה בת N מספרים שלמים. סימון: $(a_1, a_2, ..., a_N)$. אם לא מציינים את הגודל, הקופסה היא מגודל 4. אותיות סימון מקובלות: $B_1, B_2, B_K ...$.

- **הפרש קופסה** — פעולת Diff. פעולה על קופסה מגודל N, היוצרת קופסה חדשה המורכבת <u>מהערכים המוחלטים</u> של ההפרשים בין האיברים הסמוכים, בצורה ציקלית.
סימון: $B_1 \Rightarrow B_2$.

- **סדרת הפרשים** — סדרת קופסאות המתקבלת מביצועים עוקבים של פעולת הפרש על קופסה ראשונה, B_1, הקופסה המתחילה את הסדרה.
סימון: $S(B_1)$.

- **גודל סדרת הפרשים** — מספר הצעדים (מספר הקופסאות) בסדרת הפרשים המתחילה בקופסה B_1, ומסתיימת בקופסה $(0,0,0,0)$.
סימון: $l(B_1)$.

- **משרעת קופסה** — ההפרש בין האיבר הגדול ביותר בקופסה לאיבר הקטן ביותר. סימון: $|B|$.

טענה **לכל קופסה מגודל 4, גודל סדרת ההפרשים הוא מספר סופי (כלומר הסדרה תמיד מתכנסת ל- $(0,0,0,0)$ במספר סופי של צעדים.**

הוכחה

כיון שפעולת הפרש קופסה מורכבת מערכים מוחלטים, הרי כל אחת מהקופסאות בסדרת ההפרשים (פרט אולי לראשונה) תכיל תמיד מספרים אי-שליליים. לכן מספיק להוכיח את הטענה לקופסאות המכילות מספרים אי-שליליים.

<u>טענה א</u>: בהינתן $B_1 \Rightarrow B_2$, המשרעת של B_2 קטנה או שווה מזו של B_1.

הוכחה: טענה א היא פשוטה, כיון שהאיברים ב- B_2, הם המרחק המוחלט בין שני מספרים אי-שליליים, ומספר זה חייב להיות קטן מהמרחק בין המספר הגדול ביותר למספר הקטן ביותר.

<u>טענה ב</u>: בהינתן $B_1 \Rightarrow B_2$, שיוויון $|B_1| = |B_2|$ בין המשרעות יכול להתקיים אם ורק אם ב- B_1 יש שני מספרים שכנים זהים.

הוכחה: נניח כי d ו- a הם האיבר הגדול ביותר והאיבר הקטן ביותר ב- B_1. $|B_1| = d - a$.

באיזה תנאי יתקיים גם $|B_2| = d - a$?

אם ורק אם ב- B_2 האיברים $d-a$ ו- 0 הם שכנים!

באיזה תנאי יכול להופיע האיבר 0 ב- B_2?

רק אם ב- B_1 היו שני מספרים שכנים זהים! בכך הוכחנו את טענה ב.

על פי טענה א, המשרעת של הקופסאות בסדרת ההפרשים היא סדרה יורדת של מספרים חיוביים. ברור כי אם בסדרה כל איבר תמיד קטן מקודמו, הסדרה חייבת להתכנס לאפס ובכך מסתיימת הוכחת הטענה. נבחן כעת מה קורה כאשר צץ בסדרה $S(B_1)$ זוג האיברים הראשון שחוזר על עצמו, כלומר זוג איברים שעבורו $|B_k| = |B_{k+1}|$.

אם במקרה $|B_k| = 0$, אזי כל איברי הקופסה B_k זהים, ולכן $B_k = (0,0,0,0)$ כנדרש.

אך אם $|B_k| \neq 0$, המסקנה לפי טענה ב אותה הוכחנו היא שב- B_k יש שני שכנים זהים.

נניח אם כן ש- B_k היא מהצורה (a,a,x,y).

<u>טענה ג</u>: אם קופסה B, היא בעלת הצורה (a,a,x,y) אזי $l(B) \leq 6$.

נבנה את סדרת ההפרשים של B:

צעד 1: $(a,a,x,y) \;\Rightarrow\; (0,|x-a|,|y-x|,|y-a|)$

צעד 2: $(0,|x-a|,|y-x|,|y-a|) \;\Rightarrow\; (|x-a|,|y-2x+a|,|x-a|,|y-a|)$

שימו לב שבסיום צעד 2 שני האיברים במקום 1 ו- 3 זהים. לכן, בצעד הבא (וכאן נימנע מהצגת כל הביטויים המתמטיים, אך לא נשכח שההפרשים הם בערכים מוחלטים ולכן זה 'עוזר' לנו מאד), הצעד השלישי, שני האיברים הראשונים בקופסה יהיו זהים זה לזה, ושני האיברים האחרונים יהיו גם כן זהים; כלומר, נקבל קופסה מהצורה (b,b,c,c).

מכאן שבצעד הרביעי נקבל קופסה מהצורה $(0,d,0,d)$;

בצעד החמישי הקופסה תהפוך ל- (d,d,d,d), ובצעד השישי הגענו לקופסה המיוחלת - $(0,0,0,0)$, ובכך הושלמה כלל ההוכחה!

שאלות אתגר

[1] האם טענת ההתכנסות נכונה לקופסה מגודל כלשהו?
אם לא, האם היא נכונה לקופסאות מגדלים מסויימים?

[2] האם הטענה היתה נכונה גם לקופסה מגודל 4 המורכבת ממספרים רציונליים (לאו דווקא שלמים)?

קישורים

[1] Don Steward Math Teaching Blog: Diffy

[2] NLVM: Diffy Applet

[3] Trapa, P. (2006). Diffy boxes (iterations of the Ducci four number game)