التعريف الرياضي

بقلم : عثمان جابر

في حياتنا اليومية نصدف الكثير من التعاريف في سياقات مختلفة. معلّمة اللغة العربية مثلاً, تطلب من تلاميذها البحث عن تعريف مصطلح "التشبيه" في البلاغة .معلّم المدنيّات يدوّن على اللوح تعريف "الديمقراطية".رجل الدين يبحث في كتب الفقه والشريعة عن تعريف ومعنى" الإيمان" .محامي الدّفاع في قاعة القضاء ينوّه أمام القاضي بان وكيله هو بمثابة "متّهم وليس "مذنب" كما تشير اليه المادة الخاصة في تعريف "المتهم" و"المذنب" .طالب العلوم في الجامعة يبحث في معجم المصطلحات الفلكيّة عن الفرق بين تعريف "النّجم" وتعريف "الكوكب" .ومعلم الرياضيات يصوغ في دروس الرياضيات تعريف "صورة العدد" ,"الدّالة" "المتوالية الحسابية" وغيرها الكثير من المصطلحات الأخرى .
إذاً التعاريف جزءُ من عالمنا,نصدفها ونتعامل معها بشكر مباشر او غير مباشر في مجالاتٍ عِدّة , فحريٌّ أن تكون لنا مع بعضها وقفة.
وقفتنا في هذا المقال ستكون مع التعريف الرياضي, الذي يعتبر حجر اساس في علم الرياضيات على اختلاف فروعها والوانها.
يكاد لا يخلو درس, أو محاضرة أو ندوة أو محادثة بموضوع الرياضيات,من تعريف رياضي.
التعاريف الرياضياتية للمصطلحات على اختلافها نصدفها في سياقات ومواضع مختلفة . نجدها في الكتب والمجلّات والمعاجم والمقالات وغيرها,كما نتناولها في الدروس التعليمية وفي حلقات
النقاش .نصوغها ,نكتبها ,ونكررها ونمر عليها مرارا مرّ السحاب,وكأنه بسردها تكون قد ادّت دورها وطُوي سجلّها.
لا بد وأن كل منا قد صدف نصوصا مختلفة تعبّر عن تعريف لأحد المصطلحات.في سياق الهندسة مثلاً, لا بد واننا صدفنا النصوص التالية متوازي الاضلاع :

- هو مضلع رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.
- شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين.
- شكل رباعي اضلاعه متوازية, وأقطاره تنصف بعضها.

وعن المستطيل, كثيرا ما نجد أو نسمع نصوصا غير متشابهة, يعتبرها البعض تعاريف للمستطيل.نذكر منها :

- هو مضلّع رباعي جميع زواياه قائمة.
- شكل رباعي اضلاعه المتقابلة متساوية ومتوازية وزواياه قائمة.
- متوازي اضلاع زواياه متساوية (أو قائمة).

في السياق العددي, نسمع احياناً "التعاريف "التالية للعدد الأولي:

- عدد يقسم على نفسه وعلى العدد 1 .
- عدد طبيعي له بالضبط عاملين مختلفين.

وغيرها الكثير من الأمثلة.

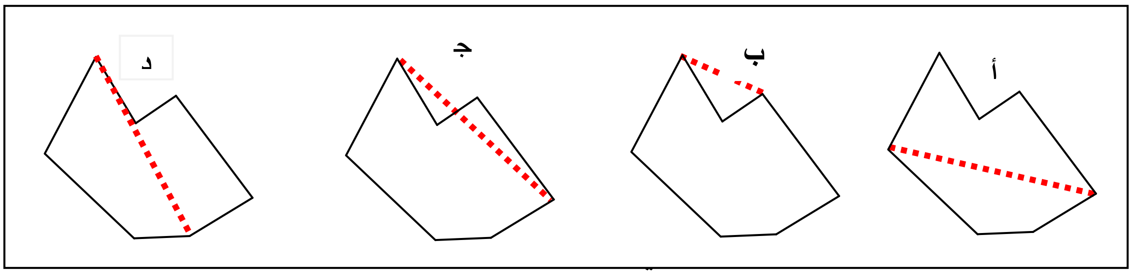
هنا نسأل, هل كل من النصوص المذكورة هو تعريف رياضي؟إذا كان الامر كذلك فلماذا هذا الاختلاف بينها في النص؟ وإذا كان غير ذلك فما هي مميزات التعريف الرياضي؟هل كل نص يصلح أن يكون تعريفا رياضيا؟هل هناك قيودا ومعايير يجب اخذها بعين الاعتبار عند صياغة التعريف الرياضي؟
سنحاول الاجابة عن هذه الاسئلة وغيرها في هذا المقال.

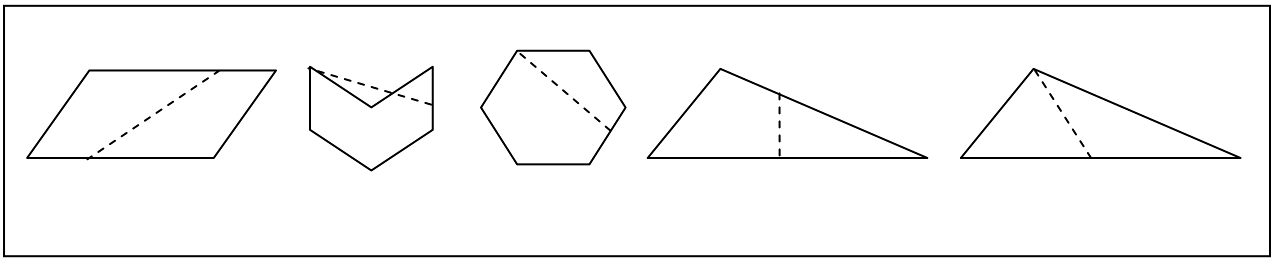
لغة التعريف

من المهم ان تكون لغة التعريف الرياضي لغة رسمية مبنية على استخدام عبارات ومصطلحات رياضياتية رسمية ومعرّفة جيّداً.
إن عنصر لغة التعريف هو عنصر اساسي يجب مراعاته جيّدا وذلك للتمييز بين لغة الرياضيات غير الرسمية التي نستخدمها أحيانا في سياق النقاش وبين لغة الرياضيات الرسمية التي نلجأ اليها مثلا عند التعريف أو صياغة النظريات والبراهين وغيرها.

الوجود

يقتضي التعريف الرياضي لمصطلح ما بوجود مثال أو نموذج يحقق ذلك التعريف.إن عدم وجود مثل ذلك النموذج يجعل من المصطلح المراد تعريفه غير مجدٍ أو مثير للإهتمام.
تخيّل مثلا اننا نريد أن نعرّف المصطلح "عدد زُحل" بأنه عدد فردي موجب ويقسم على 2 : في الواقع لا يوجد مثال لعدد يحقق التعريف.لذا من غير المجدِ أن نعوّل على مثل هذه " التعاريف" في غياب الأمثلة التي تدعّم وجودها اصلاً.
الرياضيات بكافة تعاريفها مبنية على هذه القاعدة الأساسية والتي تحتّم وجود النماذج التي تحقق التعاريف.
ان مجموعة النماذج التي تحقق المصطلح المُراد تعريفه نطلق عليها "مجموعة الأمثلة" , أما تلك التي لا ينطبق عليها التعريف أو المصطلح فنسميها " مجموعة غير الأمثلة".
في سياق مصطلح "القطر" في مضلّع (قطعة مستقيمة بين رأسين غير متجاورين) مثلاً,نسوق الامثلة ادناه في الرسم:





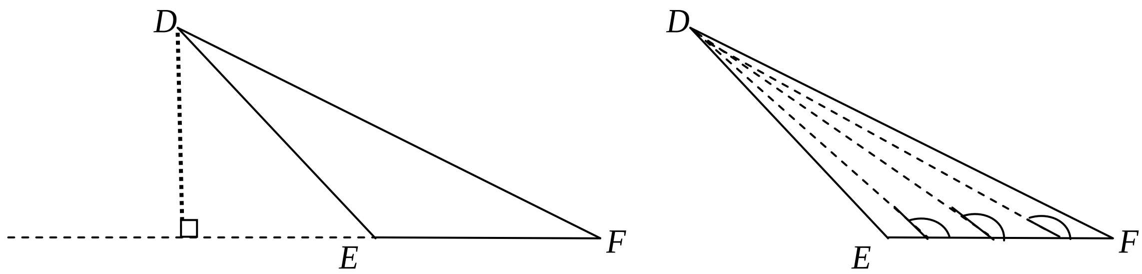
الشمولية و الدِّقة

يقتضي التعريف الرياضي ان يكون شموليا وعامّاً ودقيقا بحيث ينطبق التعريف الرياضي على كافة الأمثلة الخاصة بالمصطلح المُراد تعريفه.

في سياق تعريف مصطلح "الإرتفاع" في المثلث اثناء درس الهندسة, لعلنا صدفنا بعض التلاميذ يصوغ التعريف كالتالي : " هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على القاعدة".

تأمل المثلث ΔDEF في رسم (أ) أدناه . لاحظ انه لا يمكن مد أي عمود من الرأس D على القاعدة EF .

وفقا لصيغة التعريف أعلاه , لا يمكن اذاً مد ارتفاع على القاعدة EF . هل معنى ذلك أنه لا يوجد ارتفاع على EF ؟



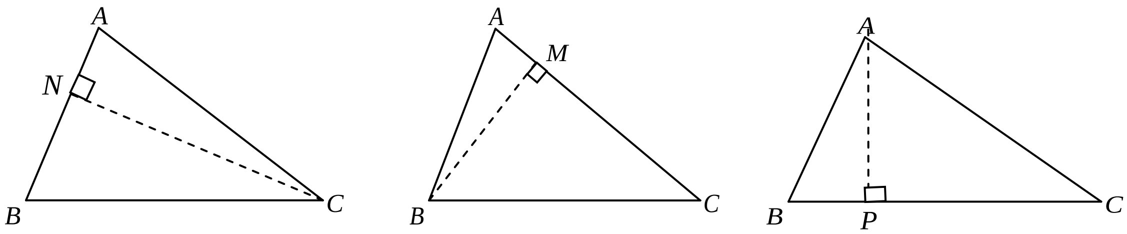
رسم ب

رسم أ

في الواقع صيغة " التعريف" المذكورة لم تأخذ بعين الإعتبار ولم تشمل الحالة الخاصة في المثلث منفرج الزاوية (كما هو الحال مع مثلث ΔDEF)التي يكون فيها الارتفاع على امتداد الضلع EF ,أي خارجيا كما يظهر في الرسم ب.

عدم الشمولية في التعريف تؤدي الى عدم دقّة التعريف وفي موازين رياضية أو هندسية دقيقة جداً يُعتبر غير صحيح, سيما وان الرياضيات من العلوم الدقيقة التي لا تنازل فيها عن مبادئ هامّة مثل مبدأ الدّقة.

لا ينتهي أمر "التعريف" المذكور أعلاه عند هذا الحد فقط.لتوضيح الامر, تأمل المثلث ΔABC أدناه:



القطعة ' رسم جـ ث ΔABC في ر، رسم د ي ارتفاع لأنها تحقّق " رسم هـ : " هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على القاعدة".

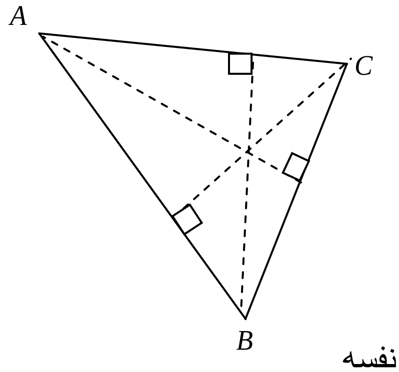
من جهة ثانية, فإن القطعة BM في مثلث ΔABC في رسم (د) ليست عموداً "نازلاً" كما هو مذكور في النص,لذا ليست ارتفاعاً حسب التعريف المذكور. كذلك الأمر بالنسبة للقطعة CN في مثلث ΔABC في رسم (هـ).

نحن نعلم جيدا, أن القطع BM و CN هي حقّاً ارتفاعات, إذا لا بد من صياغة أكثر دقّة لتعريف مصطلح الإرتفاع .

ملاحظة أخرى تتعلق بعبارة "القاعدة" التي وردت في سياق التعريف المذكور : " هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على القاعدة". تطلق العبارة "قاعدة" في مثلث عادة على الضلع الذي يرتكز عليه المثلث, في الرسم أ مثلا, EF هو قاعدة المثلث.

في رسم (جـ),(د) , (هـ) BC هو قاعدة المثلث.

صيغة التعريف المذكورة توحي الى أن الإرتفاع يكون سار المفعول عندما يكون المثلث في وضعية يرتكز فيها على أحد الأضلاع (القاعدة) , ويكون ذلك الارتفاع خاصا فقط بهذه القاعدة. ولكن, ماذا لو أن المثلث لم يكن بوضعية يكون فيها مرتكزا على أحد أضلاعه,كأن يكون مرتكزا مثلاً على أحد رؤوسه كما في الرسم أدناه ؟



المثلث ΔABC , يرتكز على الرأس B .

من الواضح انه يمكن مد ثلاثة ارتفاعات في المثلث ΔABC ,كما هو في الرسم و, وذلك على الرغم من أن المثلث لا يرتكز على أحد اضلاعه.

اذا لا بد من صياغة أكثر دقّة وشمولية لتعريف مصطلح الإرتفاع في مثلث:
هو العمود الذي يصل بين رأس المثلث والضلع المقابل , أو امتداده.

رسم و

في سياق الأعداد الأولية مثلاً , $p = \{ 2,3,5,7,11,13,17... \}$
من غير المقبول ان نعرّف عدداً أولياً على أنه "عدد فردي يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 1 فقط", لأن التعريف لم يشمل العدد الأولي 2 (غير فردي). كما أن تعريف العدد الأولي على أنه "عدد يوجد له بالضبط عاملين مختلفين "ليس دقيقا,لأن العدد (-1) مثلاً له عاملين مختلفين (1و 1-) إلا أنه ليس أولياً.
التعريف الشامل والدقيق لعدد أولي هو : "عدد طبيعي له بالضبط عاملين مختلفين".

بخصوص الدّقة في التعريف فإنها عنصر بالغ الأهمية ولا تهاون فيها. ان عدم الدّقة في لغة التعبير الرياضي عامة وصياغة التعاريف خاصة هي ظاهرة منتشرة لدى الكثير من التلاميذ او المتعلّمين إجمالاً , وينعكس ذلك في كثير من الأحيان في عدم استخدام العبارات او المصطلحات الرياضية الأكثر ملائمة.
تستوجب الدّقة تمكّناً في الثروة اللغوية عامةً ومعجم المصطلحات الرياضياتية على وجه الخصوص,وأن تطويرها يساهم في صياغة أكثر نجاعة ودقّة للنصوص الرياضياتية لدى المتعلّم.
لمعلمي الرياضيات دور فاعل في هذا الشأن, ولا يقل عنهم دوراً , معلّمو اللغة العربية الذين يساهمون بشكل كبير في صقل مهارات المتعلّم اللغوية وتطويرها وأن التنسيق بينهما ذو ابعاد وانعكاسات ايجابية تعود بالفائدة الجمّة على المتعلّم.

دقّق في النَّصّين التعريفيين التاليين لمصطلح شبه المنحرف:
♦ شبه منحرف هو شكل رباعي فيه زوج واحد من الأضلاع المتقابلة والمتوازية.
♦ شبه منحرف هو شكل رباعي فيه زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة والمتوازية.
هل لاحظت الفرق الدّقيق بين النَّصّين؟
كلمة "فقط" في النص الثاني هي سبب الإختلاف في النّصّين. ولكن هل بسبب التشابه الكبير بين النّصّين يمكننا الاستنتاج بأنهما متكافئين؟
في الواقع أن التعريفين مختلفين لأنهما يؤديان الى تصنيف مختلف.وفقاً للتعريف الأول متوازي الأضلاع يمكن اعتباره شبه منحرف في حين لا يمكن اعتباره كذلك وفقاً للتعريف الثاني.
لا بدّ واننا ايقنّا من السياق المذكور ,كيف لكلمة بسيطة في النص يمكن أن تغيّر فحواه رأساً على عقب!.إن ذلك يؤكد أهمّية الدّقة في السياق الرياضي عامة وفي صياغة التعاريف خاصةً ويعزّز ضرورة استخدام الكلمات المُثلى في النص.

التسلسل في التعاريف

نقصد هنا ان تكون التعاريف مبنية على علاقة تسلسل بينها بحيث يكون تعريف المصطلح مبنياً على اساس مصطلحات أخرى ابسط منه.

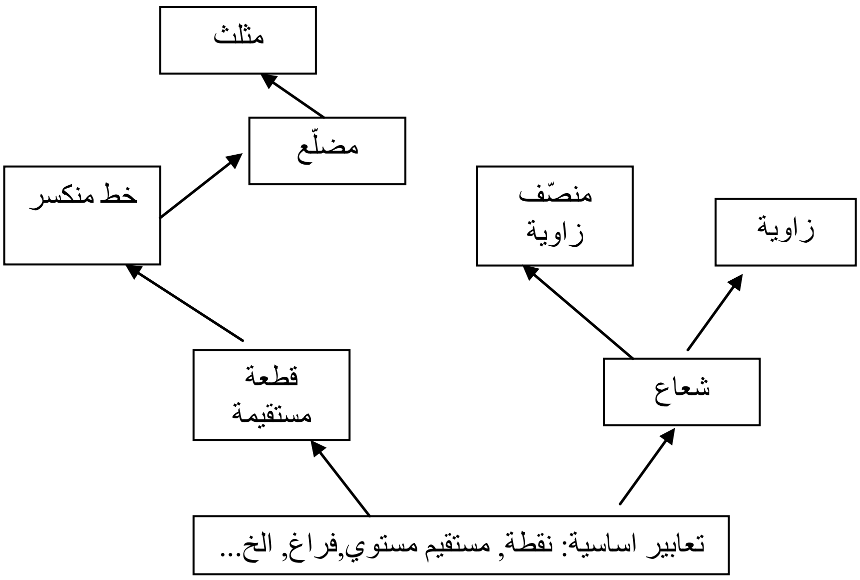
في مقال سابق "من المسلّمات الى النظريات" تناولنا عنصر التسلسل ايضا وأشرنا الى أن التعاريف أو المصطلحات الرياضياتية على اختلافها منبعها التعابير الاساسية, وهي مصطلحات لا يمكن تعريفها بواسطة مصطلحات أبسط منها مثل النقطة, المستقيم, المستوى الخ...

نعّرف زاوية مثلاً على أنها "الشكل الذي يكوّنه شعاعين يخرجان من نقطة واحدة."

في صيغة التعريف هذه, استخدمنا مصطلح الشعاع والنقطة وهما مصطلحان أبسط من حيث تسلسلهما من مصطلح الزاوية, أو بلغة أخرى هي التعابير "البسيطة" التي نستخدمها لصياغة تعريف مصطلح الزاوية.

وعند تعريفنا لمصطلح الشعاع, الذي اعتمدناه في تعريف الزاوية,نقول انه جزء من مستقيم محدود من طرف واحد وغير محدود من الطرف الاخر.هنا أيضا في تعريف الشعاع اعتمدنا مصطلح المستقيم وهو مصطلح اساسي.

الرسم المجاور يوضّح علاقة التسلسل بين بعض التعاريف الخاصة بمصطلحات مألوفة



عنصر التسلسل هو أحد مميّزات عِلم الرياضيات ولا يقتصر فقط على التعريف الرياضي, فالرياضيات ,مصطلحاتها, نظرياتها منطقها وتركيبتها ,جميعها يحكمها التسلسل.

التعريف والوصف

كما أشرنا سابقاً فإنّنا نلجأ في التعريف الرياضي عادة الى استخدام عبارات ومصطلحات رياضياتية رسمية ومعرّفة جيدا.أما في الوصف فنلجأ أحيانا الى استخدام عبارات غير رسمية أو غير مألوفة وقد لا تتصف أحيانا بالدّقة.

نصف المستقيم مثلاً ونقول :
أ. انه لانهائي.
ب. يمكن مدّه من طرفيه.
جـ. له بُعد واحد فقط.
د. بين نقطتين يمكن مد مستقيم واحد فقط.
هـ. على كل مستقيم تقع على الأقل نقطتين.
و. لوشددنا خيطاً مطاطياً (مغّاط) نحصل على شكل قريب من المستقيم .الخ...

في كل من الأوصاف السابقة نجد الكثير من العبارات غير الّرسمية وغير المعرّفة رياضياً نذكر منها ما يلي :
العبارة"الانهائي" في أ, هي عبارة وصفية, تصف بعض صفات المستقيم, لكنها ليست تعريفاً .
في وصف ب و د : عبارة "مدّه "
عبارة هـ, كما في أ, تظهر بعض صفات المستقيم.
في عبارة و: "شددنا" , خيط مطاطي, "قريب", جميعها عبارات غير رسمية وغير معرّفة رياضياً.

في وصف الإسطوانة نذكر الوصف التالي:
"جسم يتكوّن من قاعدتين, هما دائرتان متطابقتان موجودتان في مستويين متوازيين, ومن غلاف جانبي مشدود يحيطهما ".
العبارة "مشدود" ليست مصطلحا رياضيا رسميا, حيث تم استخدامها لتوضيح صفات الغلاف الجانبي للاسطوانة.
كانت تلك امثلة توضّح المقصد بـ "وصف".
نورد الان تعريفا رسميا لمصطلح متوازي الأضلاع ونقول :
"هو مضلّع رباعي, اضلاعه المتقابلة متوازية".
جميع العبارات التي استخدمت في التعريف, هي مصطلحات رياضية رسمية ومعرّفة جيّداً.
مصطلح مضلع مثلا معرّف على انه :خط منكسر مغلق.
ضلع في مضلع : القطعة المستقيمة المحدودة بين كل رأسين في المضلع.
توازي: نقول ان مستقيمين هما متوازيان إذا لم تكن بينهما نقاطاً مشتركة, أو ان البُعد بينهما ثابت.

لماذا نلجأ أحياناً الى وصف المصطلح ؟ هل ذلك نابع من غياب تعريف للمصطلح ؟ أم أن هناك اسباباً أخرى؟
هناك سببان أساسيان لاستخدام الوصف:

<u>أسباب تعود لطبيعة المصطلح:</u>
في هذه الحالة نعتمد الوصف عندما تكون المصطلحات المُراد تناولها هي تعابير اساسية حيث لا يمكن تعريفها بواسطة مصطلحات أبسط منها,كالنقطة,المستقيم, المستوي والفراغ وغيرها من التعابير الأساسية,حيث نلجأ الى إعطاء أوصاف تعبّر أو توضّح معنى المصطلح ويكون ذلك باستخدام بعض العبارات غير الرسمية.أنظر مثلاً الى وصف المستقيم أعلاه ولاحظ العبارات غير الرسمية (غير الرياضياتية) التي استخدمت في الوصف.
في وصف النقطة يمكن ان نورد بعض الصفات التالية:
- شيء لا يوجد له ابعاد.
- سطح دائرة قطرها يؤول الى الصفر.
- اذا شحذنا قلماً ووضعنا رأسه بخفة على ورقة نحصل على شكل قريب من النقطة.

في الوصف الأول , لاحظ أن كلمة "شيء" هي عبارة يشوبها الغموض ومن غير الواضح بشكل قاطع ما تعنيه.
في الوصف الثاني, تم استخدام عبارات رسمية لكن هذه العبارات (الدائرة والأوَلان الى الصفر) أبعد من ان تكون عبارات ابسط من مصطلح النقطة .فكما ذكرنا سابقا أن تعريف المصطلح يكون عادة بواسطة مصطلحات أبسط منه.في الوصف الثالث حاولنا توضيح كيفية الحصول على شكل قريب من النقطة وذلك من خلال وصف عملي, لكنه ليس تعريفاً.
وفي وصف المستوي نقول:

- سطح ليس فيه نتوءات.
- له بُعدان.
- لا نهائي.

ان الصعوبة في تعريف المصطلحات مثل "المستقيم", "النّقطة" وغيرها من التعابير الأساسية بواسطة مصطلحات ابسط منها تحتّم اللجوء الى عبارات وصفية للمصطلح وقد يؤول بنا الأمر الى الإنزلاق ,ربما ,الى عدم الدقة في بعض المواضع او التورّط في جوانب غامضة. من هنا تسمى هذه المصطلحات بالتعابير الأساسية أو الأولية والتي تعتبر حجر الأساس في صياغة التعاريف الرياضياتية الأخرى.(1)

اسباب تعليمية ديداكتية
في بعض المراحل التعليمية , وخاصة المبكّرة منها , يصدف المتعلّم الكثير من المصطلحات الرياضياتية عامة والهندسية بشكل خاص والتي تحتّم على المعلّمة اللجوء الى وصف المصطلح أو ذكر بعض مميزاته وصفاته الخاصّة , ويعود ذلك الى للأسباب التالية:

أ. المستوى الإدراكي لتلك المصطلحات لدى المتعلم في تلك المرحلة متواضع ولا يسمح بتناولها أو مناقشتها.
ب. تتصف المصطلحات عادة بالتسلسل وأن تعريف المصطلح يحتّم على المعلّم الخوض في عالم من المصطلحات التمهيدية والتسلسلية ,غير المنهجية احياناً, بهدف قَود المتعلم الى تعريف المصطلح المُراد به .
جـ. لغة الرياضيات لدى المتعلم متواضعة في تلك المراحل المبكّرة ولا يسمح المنطق ولا المنهاج إغراق المتعلم في بحر من المصطلحات المجرّدة بهدف تعريف مصطلح أو إثنين .
د. أهداف المنهاج في بعض المراحل التعليمية, وخاصة المبكّرة منها, لا تؤكد ضرورة التعريف وإنما تهدف الى إكساب المتعلم مهارات أخرى, كالمهارات البصرية التي يميز من خلالها المتعلم الشكل أو الجسم دون ان تكون هناك ضرورة الى تعريفه, أو المهارات الكلامية التي يُطلب من المتعلّم فيها ذِكر إسم الشكل أو تسميته.
في رياض الأطفال, على سبيل المثال, يندرج موضوع الأجسام (اسطوانه, هرم, مكعّب الخ..)والمضلعات (مثلث ,مربّع الخ..) في إطار المنهاج, إلا أن المنهاج لا يهدف الى تدريس التعاريف الخاصة في تلك المصطلحات وإنما يؤكّد ضرورة تنمية المعلمة لمهارات الطفل الخاصة في تمييز الأشكال أو الأجسام وتسميتها وتصنيفها حسب صفات بسيطة .
في سياق موضوع المكعب في رياض الأطفال , تصف المربية مع الأطفال المكعب :له رؤووس, وأضلاع ووجوه مربعات.يكون ذلك بالطبع من خلال الفعاليات الحيوية وبتسلسل مع مراعاة التجسيد .

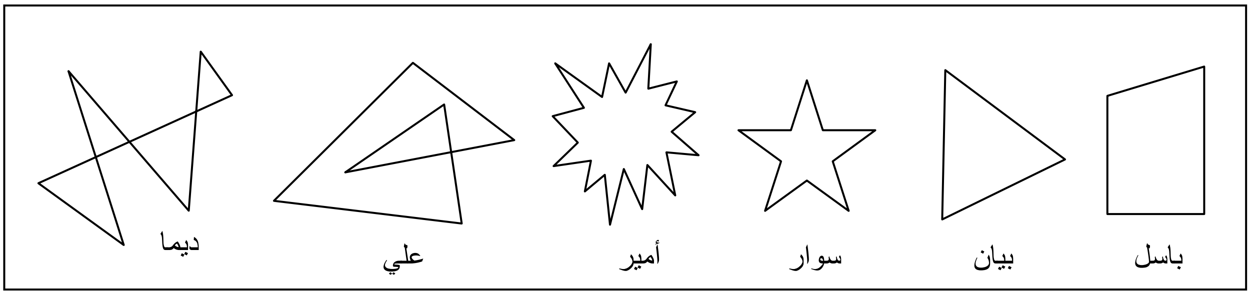
---

(1) يمكنك مراجعة المقال : "من المسلّمات إلى النّظريات" في العدد السابق من مجلة ومضات العدد.

التعريف الدستوري

يُعتمد هذا التعريف كمبدأ جازم للتمييز بين أمثلة تحقق التعريف (مجموعة الأمثلة) وأخرى لا تحققه (غير أمثلة).مجموعة كل الأشياء التي تلائم المصطلح تسمى مجموعة ''الأمثلة''
علينا الحكم وفقاً للمبدأ حتى وإن كان لا يتفق مع معتقداتنا الأولية حول المصطلح.فمثلاً عند تعريف العدد الأولي على أنه "عدد طبيعي له بالضبط عاملين مختلفين" فإن البعض قد يشكك أو لا يصرّح بأن العدد 2 أولي لأنه قد لا يتفق مع معتقدات مسبقة بأن الأعداد الأولية فردية, بما أن للعدد 2 يوجد عاملين مختلفين 1 و 2 , أي أنه يحقق تعريف العدد الأولي, فإنه علينا اعتباره أولياً بالرغم من تصوّراتنا أو معتقداتنا المسبقة.
إنّ تعريف الدالتون على أنه "شكل رباعي فيه زوجين مختلفين من الأضلاع المتجاورة والمتساوية" قد لا يدفع, هو الاخر, البعض ليصرّح أو يقرّ بأن المربّع , مثلاً, هو دالتون وذلك لأنه,ربما, لم يسبق أن صُدفت مثل هذه العلاقة التي تجمع بين شكلين لا تبدو لأول وهلة هناك علاقة هندسية تجمعهما بسبب تصورات بصريّة أو ذهنية قد تكون محدودة أو مغلوطة لكل من عائلة المربّعات أو الدالتونات.
لو تابعنا تعريف الدالتون لوجدنا ان المربّع يحقق ذلك التعريف.لذا علينا اعتبار المربّع دالتوناً.
التعريف نعتبره دستوراً ومرجعاً نحكم من خلاله ما إذا كان مصطلحا أو نموذجاً يحقق التعريف أو لا يحققه دون التأثّر بمعتقدات مسبقة أو اعتبارات ذاتية.

عرّفت المعلّمة المضلّع وقالت انه: "خط منكسر مغلق".ثم طلبت من التلاميذ رسم امثلة لمضلعات .رسم التلاميذ اشكالاً كما في الرسم أدناه .



أي تلميذ رسم مضلّعاً؟
قد يحتار بعض التلاميذ في رسمة أمير ,ربما لأنها تبدو "غريبة" أو غير مألوفة أو لأنه لم يرها أحد من قبل .وقد تكون إجابة البعض منهم ربّما قاطعة بشأن رسمة كل من علي وديما على أنها ليست مضلّعات لأنها لا تبدو مألوفة بتاتاً.
لو دقّقنا رسم علي وديما لوجدنا أنها في الواقع خطوط منكسرة مغلقة , أي أنها تحقق التعريف ولذلك يجب اعتبارها مضلّعات على الرغم من عدم ألفتها لدى البعض.
المضلّعات التي رسمها علي وديما يقطع كل منها نفسه ,هذه المضلّعات تسمّى مضلّعات غير بسيطة ولا تمتاز بصفات خاصة جديرة بالإهتمام والبحث, من هنا تنبع ربّما عدم أُلفتها وذلك على الرّغم من أنها تحقّق تعريف المضلّع.

تطبيق

1. نعرّف الدالتون على أنه"شكل رباعي فيه زوجين مختلفين من الأضلاع المتجاورة والمتساوية" قم ببناء مجموعة "أمثلة" و"غير أمثلة" لمصطلح الدالتون.
2. نقترح نصّين تعريفيين لعدد أولي: (أ)هو عدد طبيعي له عاملين مختلفين.(ب) عدد أولي هو عدد طبيعي له بالضبط عاملين مختلفين. هل التعريفين متكافئين؟علل.
3. اقترح تعريفين لمصطلح يؤديان الى تصنيف مختلف.

الأدنوية

كلمة الأدنوية مشتقة من "أدنى" أو "دنيا ", وهي بمعنى "أقل".يكون التعريف أدنوياً اذا استخدمنا فيه اقل قدر من العبارات والصفات المميّزة للمصطلح.أما باقي الصّفات فتكون نابعة منها.
الصعوبة في هذا النوع من التعريف أنه لا يمكننا, أحياناً, من خلاله تخيّل ما يعبّر عنه المصطلح وتقتضي من التلميذ أن يدرك كيف تنبع الصفات من صفات أخرى.
في بعض الأحيان قد نلجأ لتعريف غير أدنوي بهدف التسهيل.

مثال

تأمل التعاريف التالية للمربّع.

♦ مربع هو شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية وفيه زاوية قائمة.
♦ مربع هو شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية وجميع زواياه قائمة.
♦ مربع هو شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية ,إضلاعه المتقابله متوازية,زواياه قائمة وأقطاره متساوية ومتعامدة.

التعريف الأول هو تعريف أدنوي,حيث استخدم في صياغته اقل قدر من الصفات المميّزة للمصطلح.في التعريف الأول نحتاج لفحص ستة اشياء لكي نقرر إذا كان الشكل مربّعا أو لا : شكل رباعي (صفة واحدة),تساوي الأضلاع الأربعة (4 صفات),وجود الزاوية القائمة (صفة واحدة).إجمالا, إذا هناك ستّ صفات تستوجب الفحص.
صيغة التعريف الثانية (غير الأدنوي) تستدعي فحص تسع صفات : شكل رباعي ,تساوي الأضلاع الأربعة وتساوي الزوايا الأربع في الشكل.
في صيغة التعريف الثاني يسهل تمييز وإدراك الشكل بصريّا مقارنة مع صيغة التعريف الأول الذي يتصف بالأدنوية ,لأن استنتاج باقي صفات الزوايا الثلاث أنها ستكون قائمة , في التعريف الأول, وتصوّر الشكل الناتج من ذلك ليست بديهية من منظور المتعلّم .

أيضاً التعريف الثالث غير أدنوي لكن فيه فائض من الصفات التي قد تصعّب في تخيّل وإدراك الشكل الملائم للمصطلح,لذلك غير مفضّل.
من ايجابيات التعريف الأدنوي أنه عندما نفحص إذا كان مثالا ما يلائم التعريف ,فإننا نفحص عدداً أقل من الصفات المميّزة للمصطلح.
كما أشرنا سابقاً, فإننا نلجأ في بعض الأحيان الى استخدام تعريفات غير أدنوية بهدف التسهيل على المتعلّم.هذا ينعكس في بعض الأحيان اثناء تناولنا التعاريف المختلفة للمصطلحات في المرحلة الابتدائية أو الإعدادية.قِس على ذلك تعريف المستطيل:

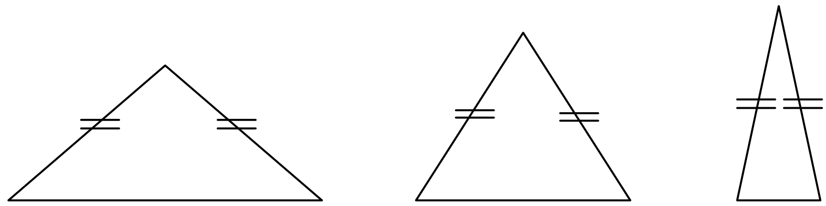
♦ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة.
♦ متوازي أضلاع زواياه قائمة.
♦ شكل رباعي زواياه متساوية (أو قائمة).

تطبيق:
♦ اقترح تعريفات مختلفة لكل من المصطلحات التالية ثم حاول التوصل الى تعريف أدنوي .
معيّن, مضلّع,دالّة
مَهمّة:
قم بإخراج غرضين من أدوات القرطاسية التي بحوزتك بحيث أن أحد الغرضان قلماً.
بعد تنفيذ المَهمّة انتقل الى العنصر التالي في التعريف الرياضي.

عدم التقيّد في صفات لم تذكر في التعريف

لا بد وأن الغرض الأول الذي استخرجته في المَهَمّة السابقة كان قلماً والغرض الثاني على الأغلب ليس قلماً.ماذا لو أن كِلا الغرضين كانا قلمان؟ .هل يكون هناك تناقض مع شروط المَهّمّة؟
الشرط الاساسي هو أن يكون هناك غرضان أحدهما قلم , حيث لا توجد أي قيود على الغرض الثاني , فيمكن للغرض الثاني أن يكون مثلاً مسطرة, أو ممحاة أو أي غرض من القرطاسية وبما فيها قلم.
إن عدم ذكر صفة ما في التعريف معناه عدم وجود قيود حول تلك الصفة.

مثال:
عَرّفت المعلمة مثلثاً متساوي ساقين على أنه " مثلث فيه ضلعين متساويين". ثم طلبت من التلاميذ رسم مثلث متساوي ساقين وفقاً للتعريف.
رسم أمير مثلثاً أطوال اضلاعه (5,5,5)
هل المثلث الذي رسمه أمير متساوي ساقين؟
في الواقع أن التعريف الذي صاغته المعلمة لمثلث متساوي الساقين لا يشير الى أي قيود تُذكر على الضلع الثالث, فيمكن للضلع الثالث أن يكون أقصر ,أطول أو يساوي كل من الضلعين الأولين كما يتضح ذلك في الرسم أدناه.



جـ ب أ

في مثلث أ, طول الضلع الثالث أقصر من الساقين.في مثلث ب,طول الضلع الثالث مساوٍ لطول الساقين (أي ان المثلث الناتج متساوي اضلاع).في المثلث جـ ,طول الضلع الثالث أطول من طول كل من الساقين.
إذاً, مثلث متساوي الأضلاع هو أيضاً متساوي ساقين ولذلك ما رسمه أمير صحيح.
في سياق اخر عَرّفت المعلّمة مصطلحات أخرى وطلبت من التلاميذ اقتراح رسوم ملائمة تعبّر عن المصطلح الذي تم تعريفه :
عندما عرّفت المعلمة المستطيل على انه "شكل رباعي زواياه الأربعة قائمة", قامت سوار برسم مربّع.
عندما قامت المعلّمة بتعريف المعيّن على أنه "شكل رباعي أضلاعه الأربعة متساوية" , قام وسيم برسم مربّع.
هل الرسومات التي اقترحها وسيم وسوار ينطبق عليها تعريف المعلّمة؟

تعريف المعلمة للمستطيل لا يشير الى قيود على أطوال اضلاعه, فيمكن ان تكون متساوية وبذلك نحصل على مربّع وتكون سوار على حق.
بصورة مشابهة , فإن تعريف المعلّمة للمعيّن لا يشير الى أي قيود على زوايا المعيّن فيمكن ان تكون جميعها متساوية , أي ان كل منها قائمة وبذلك نحصل على معيّن زواياه قائمة أي مربّع, وبذلك يكون وسيم هو الاخر محقّاً.

تطبيق
عَرّفت المعلمة الدالتون على أنه " مضلع رباعي فيه زوجين مختلفين من الأضلاع المتجاورة والمتساوية".عندما طلبت من التلاميذ رسم دالتون ينطبق عليه التعريف, قامت رشا برسم معيّن, أما وسيم فقد أصَرَّ مرّة أخرى على رسم مربّع.
هل رشا ووسيم محقّان؟لماذا؟

مَهَمَّة
حاول تعريف المصطلحات التالية
- مجموعة.
- مستقيم.

بعد تنفيذ المَهمّة انتقل الى العنصر التالي في التعريف الرياضي.

عدم الدورية في التعريف
كتنفيذ للمَهمّة المذكورة اعلاه, قام رؤوف بتعريف المجموعة كالتالي: " المجموعة هي عبارة عن مجموعة من العناصر التي تجمعها علاقة معيّنة" .أما بيان فقد عرّفت المستقيم كالتالي : " المستقيم هو عبارة عن مجموعة نقاط واقعة على استقامة واحدة"
لاحظ ان رؤوف استخدم مصطلح مجموعة لتعريف المجموعة, أي انه استخدم نفس المصطلح لتعريف المصطلح.
كذلك الأمر مع بيان التي استخدمت كلمة "الاستقامة" -وهي من مشتقات المستقيم- "لتعريف" المستقيم.
ان استخدام نفس المصطلح المُراد تعريفه في سياق تعريف المصطلح يسمّى بالدّورية, وهو امر غير مقبول في التعريف الرياضي.لذا يجب ان يراعي المتعلّم والمعلّم الانتباه لمثل هذه التكرارية أو الدورية في التعريف ويعمل هو وتلاميذه على تجنّبها.
في بعض الأحيان قد نصدف دورية في هيئة تعاريف , حيث يكون المصطلح المراد تعريفه يعتمد على مصطلح اخر,وفي تعريف هذا الاخر نعود ونستخدم المصطلح الأول.
مثال
مضلع : "شكل هندسي محدود بواسطة أضلاع ".
ضلع: " كل واحد من الخطوط التي تحد المضلع " .

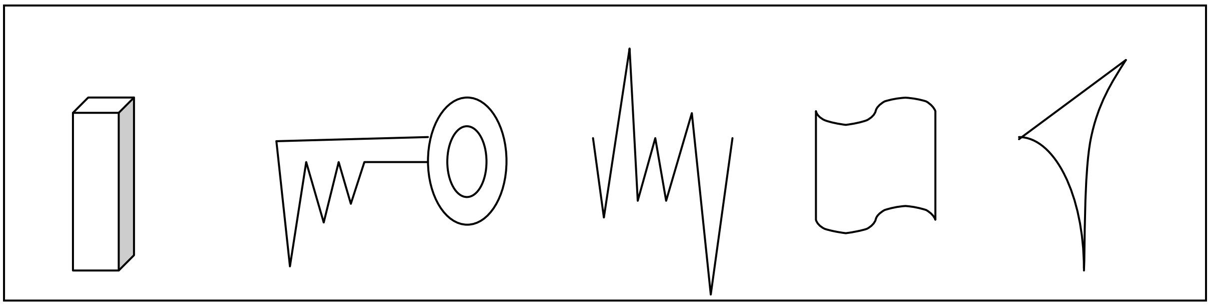
تعريف وصفي

يتم من خلال التعريف الوصفي تمييز المصطلح من خلال ذكر صفاته البارزه.التعريف الذي يظهر في القاموس هو عادة تعريف وصفي.يمكن للتعريف الوصفي أن يلائم الاستخدامات اليومية,لكنه عادة لا يصلح أن يكون تعريفاً رياضياً.

مثال
كلمة "طاولة" معرفة في القاموس:"اثاث نضع عليه اشياء مختلفة أو نعمل عليه أشياء مختلفة.

لا يمكن اعتماد هذا التعريف كمبدأ للتمييز بين ما هو طاولة لما هو غير ذلك, لأن الرَّف يحقق الوصف , والكرسي الخشبي يحقق الوصف وغيرها الكثير من الاثاث الذي نضع عليه أشياء مختلفة إلا أنه ليس بالضرورة طاولة.
في سياق اخر لوصف المضلع, قام نادر بوصفه على النحو التالي : "شكل فيه رؤوس وخطوط".

تأمل الرسومات التالية وتأكّد من أنها تحقق الوصف الذي ذكره نادر:



جميع الرسوم أعلاه تحقق إذا الوصف الذي ذكره نادر, لأنها جميعا اشكال فيها رؤوس وخطوط , إلا أن أي منها ليس مضلّعاً على الإطلاق!.من هنا فإنه لا يمكن اعتبار الوصف المطروح لنادر على أنه مبدأ جازم لتحديد ما هو مضلع أو غير مضلّع.
من الجدير ذكره أن البحث عن مصطلحات رياضياتية في القواميس اللغوية أمر غير مألوف وغير موثوق به, وإن تمّ ذلك فسيكون هناك وصفا عاما للمصطلح وعلى الأغلب لن يتصف بالدّقة أو الصّحة كما هو مبيّن في الأمثلة التالية التي تصف مصطلحات رياضياتية مأخوذة من قاموس المنجد اللغوي:

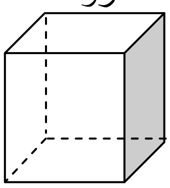
ألمصطلح	التعريف الوصفي في قاموس المنجد	ملاحظات
ألنّقطة	أطوالها منعدمة	اقتصر النص على الوصف العام
الزاوية	شكل يحدثه نصفا مستقيم خارجا من نقطة واحدة يسمّيان ضلعي الزاوية.	العبارة "نصفا مستقيم" غير صحيحة. من صفات المستقيم أنه لانهائي بحيث يمكن مدّه من طرفيه , ولا معنى هنا لأنصاف تعبير لانهائي.
قطر (في مضلع)	مستقيم يصل بين رأسين غير متتاليين	التعريف غير دقيق لأن المستقيم لانهائي والقطر في مضلع هو قطعة مستقيمة (نهائية) تصل بين رأسين غير متجاورين.
مثلث	سطح تحيط به ثلاثة خطوط	لا يوجد تحديد لنوع الخطوط ,بحيث أن الوصف يشمل ايضا الخطوط المنحنية !
مثلث منفرج الزوايا	مثلث له زاوية منفرجة	لا يوجد توافق بين المصطلح الذي ذكرت فيه عبارة "منفرج الزوايا" (أكثر من زاوية منفرجة),وبين الوصف الذي يتطرّق لزاوية منفرجة واحدة

لاحظ عدم الدّقة في التعاريف الوصفية في القاموس اللغوي, بل عدم صحتها في بعض الأحيان كما هو موضّح في الملاحظات في العمود في الطرف الأيسر.
للبحث عن التعريف الصحيح للمصطلحات الرياضياتية يكون المرجع الى مصادر موثوق بها ودقيقة كالمعاجم العلمية أو الرياضياتية لشرح المصطلحات, أو في الكتب أو المواقع الانترنتية العلمية الرسمية.

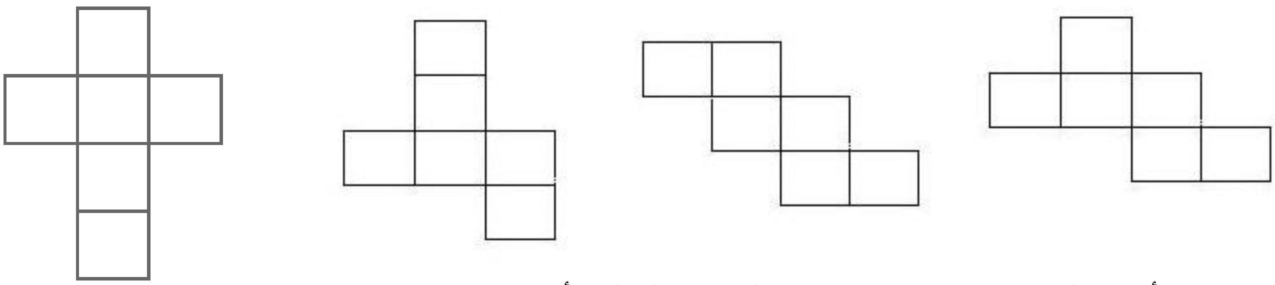
تطبيق
مَهمَّة 1: افحصوا في قاموس المنجد اللغوي عن مصطلحات رياضياتية أخرى.
مَهمَّة 2 : إبحث عن نفس المصطلحات في معجم المصطلحات الرياضياتية. قارن بين التعاريف في كِلا المصدرين.ماذا تستنتج

تعريف تطبيقي
في كثير من الاحيان يستوجب التعريف الرياضي استخدام بعض العبارات التي تدل على إجراءات عملية وتطبيقية .مثل هذا التعريف الذي تستخدم في تلك العبارات يسمى تعريفا تطبيقياً.
لعل تعريف مصطلح " التطابق" هو أحدها: شكلان مستويان هما متطابقان إذا أمكن وضعهما على بعض بحيث يغطي كل منهما الاخر تماماً.
لاحظ العبارات التي تدل على إجراء أو عمل أو تطبيق في النص :" وضعهما " , و"يغطي", بذلك يكون تعريف التطابق أعلاه تطبيقيا.

في سياق موضوع الأجسام والإنتشار نسوق مصطلح الانتشار الذي سنعرّفه تعريفاً تطبيقياً.
تخيّل ان لدينا مكعّبا مصنوعاً من الكرتون كما في الرسم, وأننا قمنا بقص المكعب مع مراعاة الشروط التالية:


مكعب

♦ أن يكون القص على طول خطوط مالوفة, مثل أضلاع الوجوه التي يتكوّن منها المكعّب.
♦ أن تبقى الأجزاء متماسكة وغير منفصلة.
عندئذ نحصل على ما نسميه انتشارا للمكعب (أنظر الرسم)

انتشارات لمكعب


لو أعدنا طي وتركيب الانتشار على طول الخطوط المألوفة لحصلنا على جسم المكعب ثانية.
لاحظ الاجراءات العملية والأفعال الدالّة على مثل تلك الإجراءات والتي تظهر في تعريف الإنتشار:"قص","طي وتركيب".
إذا راعينا الدقة في صياغة قوانين التطبيق فإنه يمكن اعتبار التعريف التطبيقي تعريفا دستوريا لأنه يحدد مبدأً واضحاً للمصطلح.

التعريف الإستقرائي

الاستقراء معناه القدرة على استنتاج العام من الخاص.والتعريف الاستقرائي يتم من خلاله التوصل الى تعريف المصطلح من خلال الأمثلة الخاصة.إن بلورة المصطلح تتم من خلال أمثلة وغير أمثلة بشكل استقرائي.إذا اعتمدنا فقط التعريف الاستقرائي فانه من شأنه أن يؤدي الى خلق مفاهيم خاطئة أو جزئية حول المصطلح.

يُبلور التلميذ المصطلح من خلال عرض الأمثلة وغير الأمثلة الخاصّة به.التعريف الاستقرائي من حيث المبدأ قد لا يصوّر بشكل قاطع الصورة الحقيقية للمصطلح ,في ظل الأمثلة الكثيرة في السياق.مع ذلك يمكن تحسين تصوّر المصطلح بواسطة الإكثار من طرح الأمثلة وغير الأمثلة والتنويع فيها.

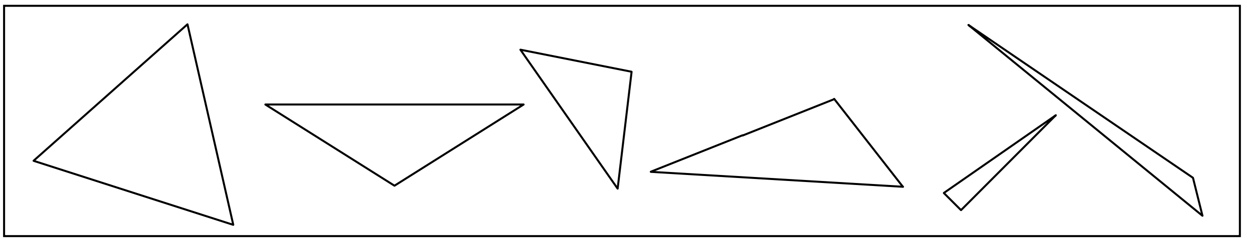
نعتمد التعريف الاستقرائي في كثير من الأحيان في المراحل التي يتعذر فيها صياغة نصوص تعريفية حيث لا يمكن للمتعلّم إدراكها بسبب قدراته الذهنية والإدراكية المتعلقة في جيله والتي لا تسمح له في فهم تلك النصوص التعريفية أو بسبب نقص في معجم المصطلحات الرياضياتية لدى المتعلّم والتي يستوجبها التعريف أو لإسباب متعلقة بالمواد المنهجية المطلوبة في تلك المرحلة. من هذه المراحل نذكر مثلاً المرحلة قبل الإبتدائية أو الإبتدائية.

مثال

مصطلح "الدائرة"يُدَرَّس في المرحلة الإبتدائية من خلال التعريف الإستقرائي.يُبلور التلميذ المصطلح من خلال أمثلة وغير أمثلة تعرضها عليه المعلّمة,في هذه الحالة يتبلور مفهوم المصطلح بحيث يتفق مع المفهوم الرسمي للمصطلح.

مصطلح "المثلث"الذي يُدَرّس هو الاخر بطريقة استقرائية في المراحل المبكّرة يُكوّن لدى بعض التلاميذ تصوّراً قد لا يتفق مع تعريفه الحقيقي

امثلة لمثلثات :

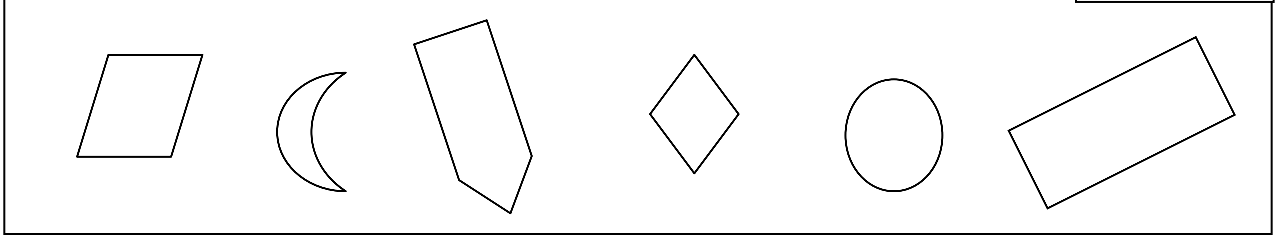


في هذه المجموعة أُدرج الشكلان الأول والثاني من الجهة اليمنى ضمن مجموعة الأمثلة بقياسات متطرّفة في أطوالهما وخاصة الضلع الأقصر. يهدف ذلك الى منع تصوّر مغلوط لمصطلح المثلث حول قياسات أضلاعه.

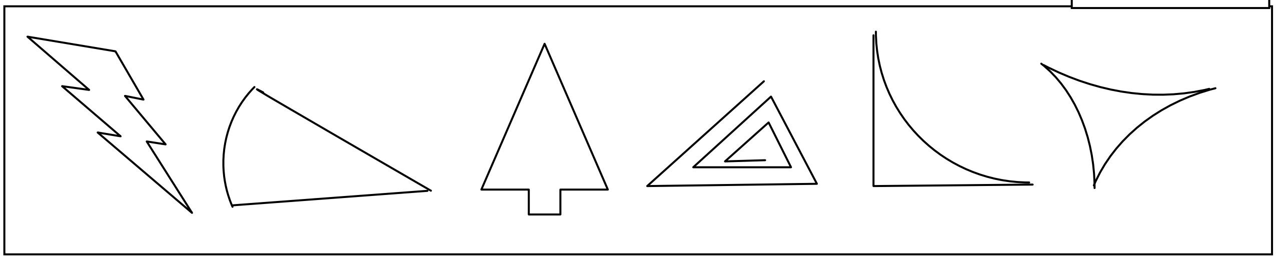
في باقي الأشكال تمّت مراعاة القياسات(أطوال,كِبَر) والوضعية (مثلث مائل, مرتكز على أحد الأضلاع, مرتكز على احد الرؤوس) والأنواع المختلفة من المثلثات(حاد الزوايا,قائم الزاوية,متساوي ساقين الخ..).

أمثلة لغير مثلثات

مجموعة (أ)

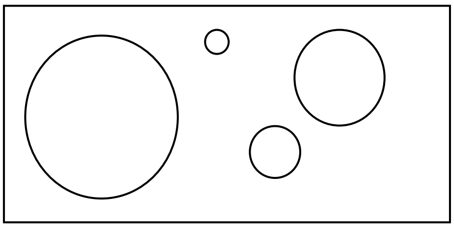


مجموعة (ب)

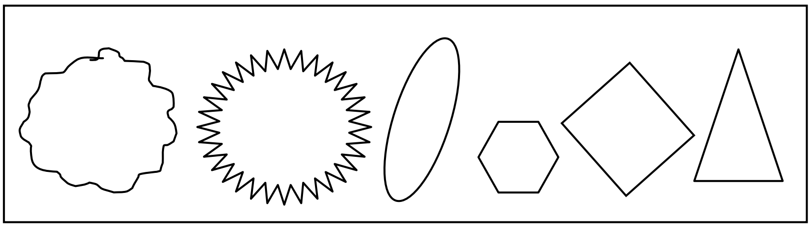


في المجموعة (أ) أُدرجت بالذات أمثلة تقليدية لغير مثلثات والتي تختلف كل الاختلاف عن عائلة المثلثات.أما في المجموعة (ب) فقد تم بناء الأشكال بدقة وحذر شديدين ,حيث تم الأخذ بعين الإعتبار عدّة عناصر دقيقة وضرورية بهدف منع بلورة مفاهيم ومغلوطة حول المثلثات.
في المجموعة (ب) كل الأشكال شبيهة الى حد كبير بالمثلثات على الرغم من انها ليست مثلثات. الشكلان الأول والثاني من الجهة اليمنى تظهر خطوطاً منحنية في كل منهما .يهدف ذلك الى تعزيز مهارة التدقيق في الأشكال لدى المتعلم .هذان الشكلان يمكن ان يضلّلا التلميذ بحيث يعتبرهما مثلثان .
ما الذي يمكن أن يضلّل التلميذ مع باقي الأشكال؟

امثلة لدوائر



امثلة لغير لدوائر



في مجموعة الأمثلة للدوائر وغير الدوائر تمت مراعاة مبادئ مشابهة لتلك في المجموعتين (أ) و (ب) .

تطبيق
اقترحوا مصطلحات اخرى يمكن تعريفها استقرائيا: زاوية قائمة,اسطوانة (بمستوى رياض اطفال مثلا)

تكافؤ التعاريف

نقول أن تعريفان هما متكافئان إذا تساوت مجموعة الأمثلة في كل منهما.أي,كل ما يحقق تعريف (أ) يحقق تعريف (ب).

مثال: تعريفات متكافئة للمربّع

- هو شكل رباعي أضلاعه متساوية , وزواياه متساوية (أو قائمة).
- هو مستطيل أضلاعه متساوية.
- هو معيّن زواياه قائمة (أو متساوية).
- هو دالتون كل أضلاعه متساوية.
- هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة وزوج من الأضلاع المتجاورة والمتساوية.

كل التعريفات المذكورة اعلاه متكافئة حيث أن لجميعها نفس مجموعة الأمثلة.

تطبيق

- اقترحوا تعريفات متكافئة لكل من المصطلحات : مستطيل,مكعّب,متوازي اضلاع.
- اختر من عندك مصطلحاً ثم حاول اقتراح تعريف مكافئ له.

الخلاصة
التعريف الرياضي هو لَبِنَةٌ ومقوّمُ اساسي في علم الرياضيات.لا يخلو أي فرع من فروع الرياضيات أو الهندسة من التعاريف.وبدونها لا وجود لعلم الرياضيات فهي لغة الرياضيات وتاجها.حَرِيّ بنا نحن المعلّمون,الطّلبة وابناء أسرة مجتمع الرياضيات, أن نحافظ على هذا التاج.
في دروس الرياضيات حَرِيّ بنا ان نعطي التعريف الرياضي حقّه:نصوغه,ندقّقه,نناقشه,نجسّده ,ندوّنه ونذوّته مع تلاميذنا بحيث تكون التعاريف والمصطلحات الرياضياتية جزءاً من لغة الرياضيات المتبادلة بين المعلم والمتعلم على امل أن تكون هذه خطوة أساسية وانطلاقة نحو تعلّم صحيح وحقيقي لعلم الرياضيات.

المصادر

جابر,عثمان.من المسلّمات الى النظريات.مجلة ومضات العدد ,2011.
قاموس المنجد في اللغة والأعلام.دار المشرق –بيروت 1986.